13. Jgst./Kurs M LK 2	1. Test	Datum: 26.08.2020
Fach: Mathematik (Leistungsfach)		

Name:	
Punkte:	Note:

Themen: Lösung (In)Homogener LGS und Lösungsverhalten; Determinanten

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1:

Gegeben seien folgende Matrizen:

10	

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -k \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} k & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & k \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Werte der Determinanten der beiden Matrizen.

b) Für welchen Wert von k ist die ***Matrix A*** regulär (= invertierbar)?

Lösung:

$$Det(A) \;=\; 8+k \quad \Rightarrow \quad A \;\; regulär \;\Leftrightarrow\; 8+k \neq 0 \;\rightarrow\; k \in \Re \setminus \{-8\}$$

$$Det(B) \underset{nach\ Spalte\ 2}{\overset{Laplace-Entw.}{=}} (-)1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & k & -k \end{vmatrix} + 0 - 0 + 0 \underset{Regel}{\overset{Sarrus-}{=}} (-)1 \cdot \left[0+0-k^2-6k-0-2k\right] \;=\; k^2+8k$$

30	

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes LGS: $A_p \cdot \vec{x} = \vec{b_p} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p-1 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix A_p folgende Form annehmen kann: $\det(A_p) \;=\; -p^3+7p-6$

Lösung: Nachrechnen per Sarrus-Regel oder per Laplace-Entwicklung

b) Ermitteln Sie die Inverse zur Matrix A_0

Lösung:

Mögliches Vorgehen zur Invertierung von Matrizen: ***Verfahren über die adjungierte Matrix***

(1) Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden

(2) Transponieren der Matrix

(3) Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden

(4) Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad und \quad Det(A_0) = -6$$

Inverse:

$$A_0 \xrightarrow[VZ-Schema]{Unter\,det.} -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{transpon.} -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A_0^{-1}$$

c) Wie lautet die Lösung des LGS $A_0 \cdot \vec{x} = \overrightarrow{b_0}$?

Lösung:

$$A_0 \cdot \vec{x} = \overrightarrow{b_0} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = A_0^{-1} \cdot \overrightarrow{b_0} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alternativen: Gauß-Verfahren oder Cramer-Regel

d) Für welchen Wert von p, nimmt das LGS $A_p \cdot \vec{x} = \overrightarrow{b_p}$ folgende Lösung an $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$A_p \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{b_p} \rightarrow \begin{pmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} I) & \frac{1}{4} \cdot (-p+5-2) = 1 \\ \rightarrow II) & \frac{1}{4} \cdot (-2+5-p) = 1 \\ III) & \frac{1}{4} \cdot (-1+5p-2) = p-1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} I) & -p+3 = 4 \\ II) & -p+3 = 4 \\ III) & 5p-3 = 4p-4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} I) & p = -1 \\ II) & p = -1 \\ III) & p = -1 \end{array}$$

e) Für welche Werte von p hat das LGS

(i) genau eine Lösung? (ii) unendlich viele Lösungen? (iii) keine Lösungen?

Lösung:

$$\det\left(A_p\right) = -p^3+7p-6 = 0 \rightarrow p_1=-3 \vee p_2=1 \vee p_3=2$$

Genau eine Lösung: $p \in \Re \setminus \{-3;1;2\}$

Untersuchung der drei Lösungen für p:

Fall p = -3:

$$A_{-3}\cdot\vec{x}=\overrightarrow{b_{-3}} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gauß – Verfahren:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow{I\leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow[III+3I]{II-2I} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}\right.$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}II} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{7} \\ -11 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow[III+8I]{I+3II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}\right. \rightarrow \text{keine Lösung wegen Zeile III}$$

Fall p = 1:

$$A_1\cdot\vec{x}=\overrightarrow{b_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß – Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right. \rightarrow \text{keine Lösung wegen Zeile III}$$

Fall p = 2:

$$A_2\cdot\vec{x}=\overrightarrow{b_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauß – Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow{I\leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow[III-II]{II-2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I-2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1-2z \\ 1-2z \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re$$

$\Rightarrow$ *unendliche Lösungsmenge*

f) Lösen Sie die beiden LGS $A_2 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ *und* $A_2 \cdot \vec{x} = \vec{b_2}$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

$$A_2 \cdot \vec{x} = \vec{b_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1-2z \\ 1-2z \\ 3z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re$$

$$A_2 \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ 3z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re$$

10	

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Ableitung und die Stammfunktion zur Funktion $f(t)$ mit $C_t = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 1 \\ -e^{3t} & 0 & t \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(t) = Det(C_t) + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 1 \\ -e^{3t} & 0 & t \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Det(C_t) = 0 + 6t^2 - e^{3t} - 0 - t - 0 = -e^{3t} + 6t^2 - t$$

$$f(t) = -e^{3t} + 6t^2 - t + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t \end{pmatrix} = -e^{3t} + 6t^2 - t - 6t^2 + t = -e^{3t}$$

$$f'(t) = -3e^{3t} \quad und \quad F(t) = -\frac{1}{3}e^{3t} + c$$