13. Jgst./Kurs M LK 2	4. Test	Datum: 05.02.2021
Fach: Mathematik (Leistungsfach)		

Name:	
Punkte:	Note:

Themen: Logarithmus: Def.-Bereich, Ableitungen, Gleichungen

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Begriffe und Erklärungen

a) Vervollständigen Sie folgenden Text:

Offensichtlich hat eine Gleichung $a^x = b \; mit \; b > 0$ genau eine Lösung. Die Form dieser Gleichung lautet **Exponentialgleichung**. Die Lösung dieser Gleichung $x \in \mathbb{R}$ heißt **Logarithmus** von b zur Basis a. Man schreibt $x = \log_a b$. a heißt **Basis**, der Buchstabe b wird **Numerus** genannt, x lautet dann der **Logarithmus**. Logarithmen berechnen heißt den **Exponenten** einer Potenz bestimmen.

Bei zwei Logarithmenformen wird auf die Basis verzichtet und dafür eine gesonderte Benennung verwendet. Bitte vervollständigen Sie die Tabelle:

Nr	Logarithmus	Basis	Bezeichnung / Name
1	$x = \lg(b)$	**a = 10**	**Zehner-/Briggs-Logarithmus (Logarithmus generalis)**
2	$x = \ln(b)$	**a = e**	**Logarithmus naturalis / natürlicher Logarithmus**

Aufgabe 2: Bestimmen Sie folgende Logarithmen

a) $x = \log_3 81$ b) $x = \log_{\sqrt{2}}\left(4 \cdot \sqrt{2}\right)$ c) $x = \log_{0,4} \frac{625}{16}$

Lösung:

$x = \log_3 81 \quad \rightarrow \quad x = 4$

$x = \log_{\sqrt{2}}\left(4 \cdot \sqrt{2}\right) \quad \rightarrow \quad x = 5$

$x = \log_{0,4} \frac{625}{16} = \log_{\frac{2}{5}} \frac{625}{16} \quad \rightarrow \quad x = (-4)$

Aufgabe 3: Basis gesucht

a) $5 = \log_a 1024$ b) $7,5 = \log_a 1808,0424$ c) $6 = \log_a 1.000.000$

Lösung:

$5 = \log_a 1024 \quad \rightarrow \quad a^5 = 1024 \quad \xrightarrow{\sqrt[5]{\;}} \quad a = 4$

$7,5 = \log_a 1808,0424 \quad \rightarrow \quad a^{7,5} = 1808,0424 \quad \xrightarrow{\sqrt[7,5]{\;}} \quad a = e$

$6 = \log_a 1.000.000 \quad \rightarrow \quad a^6 = 1.000.000 \quad \xrightarrow{\sqrt[6]{\;}} \quad a = 10$

Aufgabe 4: Numerus gesucht

a) $8=\log_2 x$ b) $4=\ln x$ c) $-3{,}5=\ln x$

Lösung:

$8=\log_2 x \quad\rightarrow\quad 2^8=x \quad\rightarrow\quad 256=x$

$4=\ln x \quad\rightarrow\quad e^4=x \quad\rightarrow\quad 54{,}6\approx x$

$-3{,}5=\ln x \quad\rightarrow\quad e^{-3{,}5}=x \quad\rightarrow\quad 0{,}030197\approx x$

Aufgabe 5: Ermittlung des Definitionsbereichs der Funktion

a) $f(x)=\ln(3x)$ b) $f(x)=\ln\left(4x^2-5x+1\right)$ c) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$

Lösung:

$f(x)=\ln(3x) \quad\rightarrow\quad 3x>0 \quad\rightarrow\quad x>0 \quad\rightarrow\quad D=\mathbb{R}^+$

$f(x)=\ln\left(4x^2-5x+1\right) \quad\rightarrow\quad 4x^2-5x+1>0$

$\xrightarrow{\text{Nullstelllen}} \quad x_1=0{,}25 \quad und \quad x_2=1 \quad \xrightarrow[\text{daher: Bereich außerhalb des Nullstellenintervalls}]{\text{nach oben geöfnete Parabel}} \quad D=\mathbb{R}\setminus[0{,}25\,;1]$

$f(x)=\ln\sqrt{1+x^2} \quad\rightarrow\quad \sqrt{1+x^2}>0 \quad \xrightarrow[\text{größer 0; daher auch } 1+x^2>0]{x^2 \text{ ist in R immer}} \quad D=\mathbb{R}$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion

a) $f(x)=\ln(3x)$ b) $f(x)=\ln\left(4x^2-5x+1\right)$ c) $f(x)=x^3\cdot\ln\sqrt{x}$

Lösung:

$f(x)=\ln(3x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{1}{x}$

$f(x)=\ln\left(4x^2-5x+1\right) \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{4x^2-5x+1}\cdot(8x-5)=\frac{8x-5}{4x^2-5x+1}$

$f(x)=x^3\cdot\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\ln x$

$\rightarrow \quad f'(x)=\frac{3}{2}x^2\cdot\ln x+\frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\frac{1}{x} \quad = \quad \frac{3}{2}x^2\cdot\ln x+\frac{1}{2}\cdot x^2 \quad = \quad \frac{1}{2}x^2\left(3\ln x+1\right)$

Zusatzaufgabe: **Bestimmen Sie zeichnerisch die Lösung zu folgender Gleichung**

$$\ln(x) = x - 1$$

Lösung: Schnittpunkt S(1/0)