12. Jgst.	1. Test	Datum: 03.09.2019
Kurs M LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungen; Tangenten & Normalen; Ganzrat. Fkt. mit Parameter; Ortskurve**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Ableitungen **12**

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie so weit wie möglich, so dass nur positive Exponenten resultieren.

a) $f_k(x) = \frac{1}{2}k^4x^n$ b) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3}{x^2}$ c) $f_k(x) = \frac{k^2}{2 \cdot x^n}$ d) $f_k(x) = \frac{k^2}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: Ortskurven **4**

Eine Funktion besitzt im Punkt $P\left(\frac{1}{2}k \;\middle|\; \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k\right)$ ein Minimum.

Berechnen Sie die Ortskurve der Minima.

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung **34**

Gegeben sei folgende Funktion: $f_t(x) \;=\; x^3 - 3tx^2 \quad mit\; t > 0$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion immer genau zwei Extrema besitzt und bestimmen Sie diese.

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt und begründen Sie, weshalb dieser die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt halbiert.
Wie lang ist die Strecke?

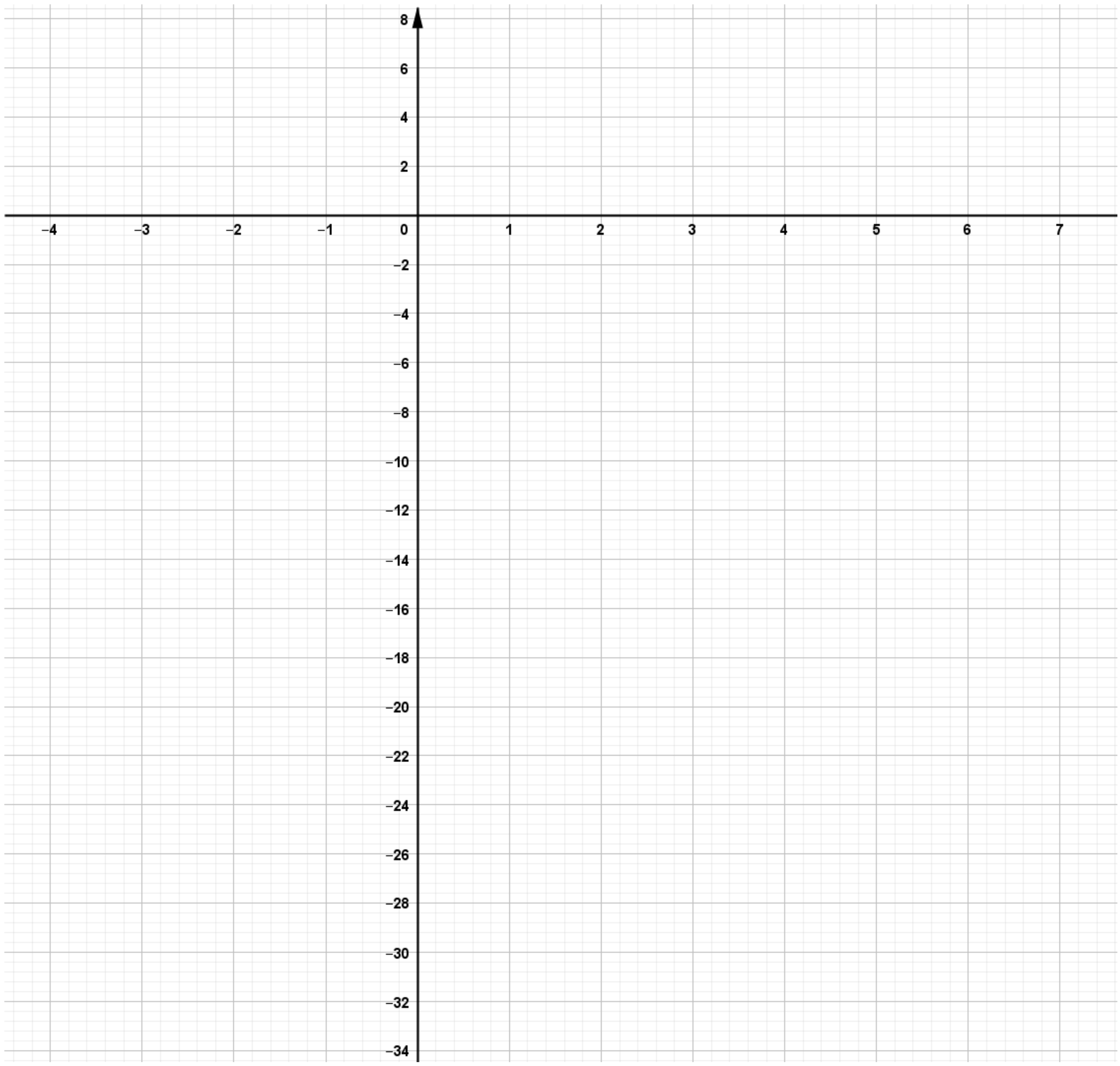
d) Für welchen Wert von t liegt das Minimum an der Stelle x = 4?

e) Ermitteln Sie den Wert von t für den gilt:
Der Graph von f an der Stelle x = 2 ist parallel zur Ursprungsgeraden y = 4x?

f) Zeichnen Sie die Funktion für t = 1 und t = 2 in nebenstehendes KO-System.

<u>**Es gelte nun: t = 1**</u>

g) Bestimmen Sie die Tangenten- und Normalengleichung in $P\left(t \;\middle|\; -2t^3\right)$



4	

Zusatzaufgabe:

Erläutern Sie die Begriffe notwendige und hinreichende Bedingung eines lokalen Extremums einer Funktion.

Musterlösung

A1:

a) $f_k'(x) = \frac{1}{2} n k^4 x^{n-1}$ 3

b) $f'(x) = 2x - 4$ 3

c) $f_k'(x) = \frac{-n k^2}{2 x^{n+1}}$ 3

d) $f_k'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{\sqrt{x^3}}$ 3

/ Σ 12

A2: $x = \frac{1}{2} k \leadsto k = 2x$ 1

$y = \frac{1}{8}(2x)^2 - \frac{1}{4} \cdot 2x$ 1

$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x$ 2 / Σ 4

A3: $f_t(x) = x^3 - 3tx^2 \quad t > 0$

a) NS: $x^2(x - 3t) = 0 \qquad x_{1/2} = 0 \lor x_3 = 3t$ 3

b) $f_t'(x) = 3x^2 - 6tx = 0$

$x(3x - 6t) = 0 \qquad x_1 = 0 \lor x_2 = 2t$

$f_t''(x) = 6x - 6t$

$f_t''(0) = -6t < 0 \Rightarrow MAX(0|0) \qquad MIN(2t|-4t^3)$ 6

c) WP $\Rightarrow f_t''(x) = 6x - 6t = 0 \leadsto x = t$

$f_t'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow W(t|-2t^3)$

Strecke: MIN - MAX $\left.\begin{array}{l} m_x = \frac{1}{2}(2t + 0) = t \\ m_y = \frac{1}{2}(-4t^3 + 0) = -2t^3 \end{array}\right\} \hat{=}$ WP

Länge: $e = \sqrt{(2t-0)^2 + (-4t^3 - 0)^2}$

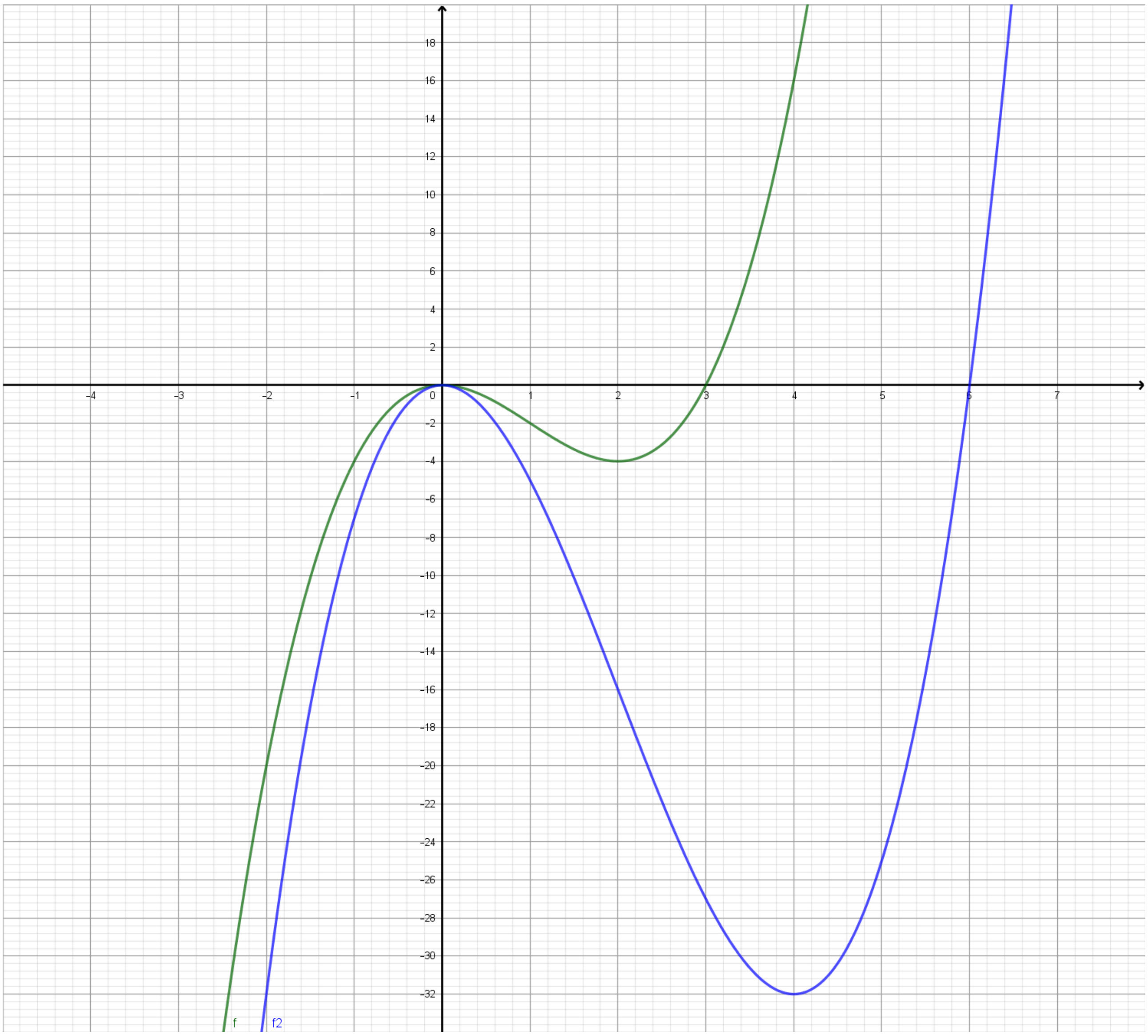
$e = \sqrt{4t^2 + 16t^6} = 2t\sqrt{1 + 4t^4}$ 7

d) $MIN_x: \quad 2t = x \quad \rightsquigarrow \quad 2t = 4 \quad \rightsquigarrow \quad t = 2$ 2

e) $f_t'(x) = 3x^2 - 6tx \quad = m$

$f_t'(2) = 12 - 12t \quad = 4 \quad \rightsquigarrow \quad t = \frac{2}{3}$ 4

f) Graph 6



g) $t = 1$: $f_1(x) = x^3 - 3x^2$ $\qquad$ $P(1/-2)$

Tangente: $f_1'(x) = 3x^2 - 6x$

$f_1'(1) = -3$

$-2 = -3 \cdot 1 + b$

$b = 1$

$t(x) = -3x + 1$ $\qquad$ 3

Normale: $m_t \cdot m_n = -1$

$-3 \cdot m_n = -1$

$m_n = \frac{1}{3}$

$-2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + b$

$b = -\frac{7}{3}$

$n(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ $\qquad$ 3

/ Σ 34

Zusatzaufgabe

Notwendige Bed.: $f'(x) = m = 0$ $\qquad$ 1

Hinreichende Bed.: $f'(x) = m = 0$ $\wedge$

$f''(x) > 0$ MIN ✓

$f''(x) < 0$ MAX

3 / Σ 4