12. Jgst.	2. Test	Datum: 29.10.2019
Kurs M LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungen (insgesamt); Gebr.-rat. und Wurzelfunktionen**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Ableitungen | **10** | |

Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $g(x) = \left(3x^2 - 4x\right)^{10}$

b) $k(x) = \sqrt{x} \cdot e^{4x}$

c) $t(x) = \cos^2(x)$

Aufgabe 2: Wurzelfunktion I | **12** | |

Geben sei folgende Funktion: $f(x) = x - 3 - 4\sqrt{x}$

Bearbeiten Sie die Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

a) Schnittstellen mit den beiden Koordinatenachsen

b) Beurteilen Sie die Symmetrieeigenschaft(en)

c) Extrema (Bitte vollständiger Nachweis!)

Aufgabe 3: Steigungen | **8** | |

Gegeben sie die Funktion $f(x) = \sqrt{16 - \frac{1}{2}x^2}$

An welcher Stelle hat die Funktion die Steigung m = 2?

Aufgabe 4: Gebrochen-rationale Funktionen

18	

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{0,5x + 2}$

a) Berechnen Sie Polstellen, Nullstellen und Lücken (falls vorhanden).

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.

c) Ermitteln Sie die Asymptote und den Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

d) Wie lauten die Extremwert**stellen** der Funktion
(notwendige Bedingung genügt – d.h. 1. Ableitung)?

Aufgabe 5:

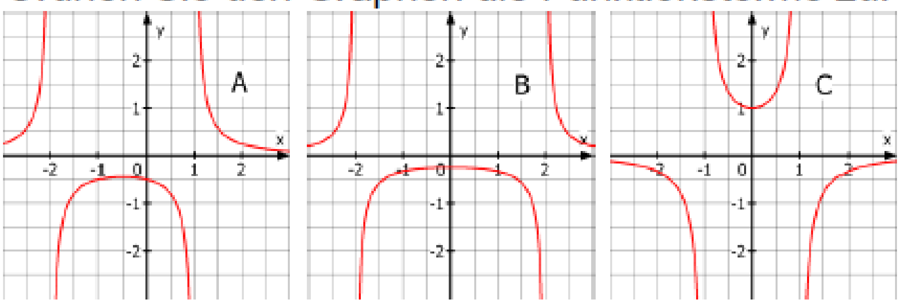
12	

a)

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?		Wahr	Falsch
a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.	a)	☐	☐
b) Hat f eine Polstelle bei x_0, so gilt $f(x_0) = \infty$.	b)	☐	☐
c) Hat f eine Polstelle bei x_0, so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.	c)	☐	☐
d) Hat f die Definitionslücke x_0, so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.	d)	☐	☐

b)

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



____ $\dfrac{1}{1-x^2}$

____ $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

____ $\dfrac{1}{x^2-1}$

____ $\dfrac{1}{x^2-4}$

c)

Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, die in x = 3 eine Polstelle mit VZW, in x = -1 eine doppelte Nullstelle und eine Asymptote bei y = 4 besitzt.

Lösungen:

1

a) $f'(x) = 10\,(3x^2 - 4x)^9 \cdot (6x-4)$ 3

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{4x} + 4\sqrt{x}\; e^{4x}$ 4

c) $t'(x) = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x))$ 3

Σ 10

2 a) $S_y(0|-3)$ 1

$x - 4\sqrt{x} - 3 = 0$

$u^2 - 4u - 3 = 0 \rightsquigarrow u_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2}$

$u_{1/2} = \frac{4 \pm 5{,}3}{2}$ $u_1 = 4{,}65$, $u_2 = -0{,}65$ 4

$\Rightarrow x_1 \approx 21{,}5$

~~$x_2 \approx 0{,}5$~~

b) keine Symmetrie da $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ 2

c) $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightsquigarrow \sqrt{x} = 2 \rightsquigarrow x = 4$

$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \rightsquigarrow f''(4) > 0 \Rightarrow \text{MIN}(4/-7)$

5

Σ 12

(3) $f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{16-\frac{1}{2}x^2}} = 2$ | · Nenner 3

$-x = 4\sqrt{16-\frac{1}{2}x^2}$ | ²

$x^2 = 16\left(16-\frac{1}{2}x^2\right)$ 1

$9x^2 = 256$

$x^2 = 28{,}44 \rightsquigarrow |x| = 5{,}33$ 3

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-5{,}33\}$ 1/28

(4)

Zähler	Nenner
$x(x-5) = 0$	$0{,}5x+2=0$
$x_1 = 0$	$x = -4$
$x_2 = 5$	

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

NS: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 5$

Pol m VZW: $x = -4$

keine Lücke 5

b) Symmetrie: keine Symmetrie, da z(x) und n(x) 2
keine Symmetrie besitzen

c) Asymptote: $(x^2-5x) : (\frac{1}{2}x+2) = \boxed{2x-18}$

$\underline{-(x^2+4x)}$

$-9x$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x}{0{,}5x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-5}{0{,}5} \to \infty$ L'Hospital

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x}{0{,}5x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{0{,}5} \to -\infty$ 4

d) $$f'(x) = \frac{(2x-5)(0{,}5x+2) - (x^2-5x)\cdot 0{,}5}{(0{,}5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x-2{,}5x-10 - 0{,}5x^2+2{,}5x}{(0{,}5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0{,}5x^2+4x-10}{(0{,}5x+2)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$0{,}5x^2+4x-10 = 0$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16+20}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm 6 \quad x_1 = -10, \quad x_2 = 2$$

7 / Σ 18

5

a) w - f - w - f 4

b) C~~WA~~ - A - ~~C~~ - B 3

c) $$f(x) = \frac{4\cdot(x+1)^2}{(x-3)\ x}$$ 5

Σ 12

Aufgabe 1: Ableitungen

Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $g(x) = \left(3x^2 - 4x\right)^{10}$ b) $k(x) = \sqrt{x} \cdot e^{4x}$

c) $t(x) = \cos^2(x)$

Lösung:

$$g'(x) = 10 \cdot \left(3x^2 - 4x\right)^9 \cdot (6x - 4)$$

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{4x} + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{4x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot e^{4x}$$

$$t'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot \left[-\sin(x)\right]$$

Aufgabe 2: Wurzelfunktion I

Geben sei folgende Funktion: $f(x) = x - 3 - 4\sqrt{x}$

Bearbeiten Sie die Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

a) Schnittstellen mit den beiden Koordinatenachsen
b) Beurteilen Sie die Symmetrieeigenschaft(en)
c) Extrema (Bitte vollständiger Nachweis!)

Lösung:
Schnittstellen mit den beiden Koordinatenachsen

$$f(0) = 0 - 3 - 4\sqrt{0} = -3 \rightarrow S_y(0 \mid -3)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow 0 = x - 3 - 4\sqrt{x}$$

$$\textit{Lösung 1:} \quad \textit{Substitution} \rightarrow u = \sqrt{x}$$

$$u^2 - 4u - 3 = 0 \rightarrow u_1 = 4{,}65 \vee u_2 = -0{,}65 \rightarrow x \approx 21{,}58$$

$$\textit{Lösung 2:} \quad \textit{Separieren und quadrieren}$$

$$x - 3 = 4\sqrt{x} \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 16x \rightarrow x^2 - 22x + 9 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 21{,}58 \vee x_2 = 0{,}42 \rightarrow x \approx 21{,}58 \textit{ wegen Definitionsbereich}$$

Beurteilen Sie die Symmetrieeigenschaft(en)

⇨ Keine Symmetrie, wegen Definitionsbereich

Extrema (Bitte vollständiger Nachweis!)

$$f'(x) = 1-0-\frac{4}{2\cdot\sqrt{x}} = 1-\frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x=4$$

$$f''(x)=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}} \rightarrow f''(4)=\frac{1}{\sqrt{4^3}}=\frac{1}{8}>0 \rightarrow TP$$

$$f(4) = 4-3-4\sqrt{4} = -7 \rightarrow Min(4 \mid -7)$$

Aufgabe 3: Steigungen

Gegeben sie die Funktion $f(x) = \sqrt{16-\frac{1}{2}x^2}$

An welcher Stelle hat die Funktion die Steigung m = 2?

Lösung:

$$f'(x) = \frac{-x}{2\cdot\sqrt{16-\frac{1}{2}x^2}} = 2 \rightarrow -x = 4\cdot\sqrt{16-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\xrightarrow{quadrieren} x^2 = 16\cdot\left(16-\frac{1}{2}x^2\right) \rightarrow 9x^2 = 256$$

$$\rightarrow x^2 = 28,44 \rightarrow |x| = 5,33 \rightarrow L = \{-5,33\}$$

Probe durchführen, da beim Quadrieren der Lösungbereich der Gleichung erweitert wird.

Aufgabe 4: Gebrochen-rationale Funktionen

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2-5x}{0,5x+2}$

a) Berechnen Sie Polstellen, Nullstellen und Lücken (falls vorhanden).

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.

c) Ermitteln Sie die Asymptote und den Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

d) Wie lauten die Extremwert**stellen** der Funktion (notwendige Bedingung genügt – d.h. 1. Ableitung)?

Lösung:

Berechnen Sie Polstellen, Nullstellen und Lücken (falls vorhanden).

$$\text{Zählernullstellen:} \quad 0 = x(x-5) \quad \to \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 5 \quad \to \quad \text{Nullstellen der Funktion}$$

$$\text{Nennernullstellen:} \quad 0 = 0{,}5x+2 \quad \to \quad x = -4 \quad \to \quad \text{Polstelle m.VZW}$$

keine Lücke vorhanden

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 5(-x)}{0{,}5(-x)+2} = \dfrac{x^2+5x}{-0{,}5x+2} \neq f(x) \\[2ex] f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 5(-x)}{0{,}5(-x)+2} = \dfrac{x^2+5x}{-0{,}5x+2} \neq -f(x) \end{array}\right\} \to \quad \textit{keine Symmetrie}$$

Ermitteln Sie die Asymptote und den Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

$$\textit{Asymptote}: \quad \textit{Polynomdivision} \quad \to \quad a(x) = 2x - 18$$

Grenzwertverhalten mittels L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x}{0{,}5x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-5}{0{,}5} \to \pm\infty$$

Wie lauten die Extremwert**stellen** der Funktion (notwendige Bedingung genügt – d.h. 1. Ableitung)?

$$f'(x) = \frac{(2x-5)\cdot(0{,}5x+2) - (x^2-5x)\cdot 0{,}5}{(0{,}5x+2)^2} = \frac{x^2+4x-2{,}5x-10-0{,}5x^2+2{,}5x}{(0{,}5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0{,}5x^2+4x-10}{(0{,}5x+2)^2} = 0 \quad \to \quad x_1 = -10 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

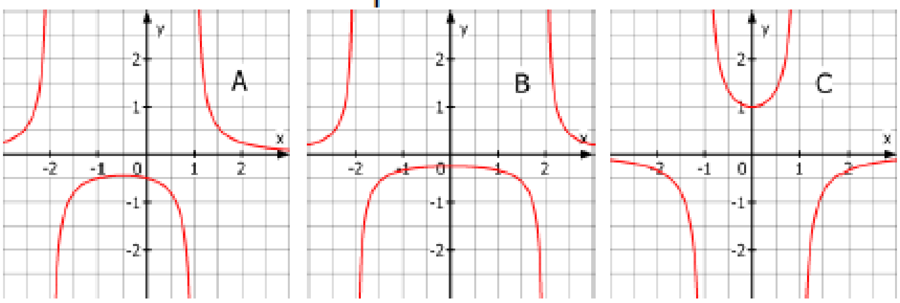
Aufgabe 5:

a)

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?		Wahr	Falsch
a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.	a)	☒	☐
b) Hat f eine Polstelle bei x_0, so gilt $f(x_0) = \infty$.	b)	☐	☒
c) Hat f eine Polstelle bei x_0, so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.	c)	☒	☐
d) Hat f die Definitionslücke x_0, so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.	d)	☐	☒

b)

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



C	$\frac{1}{1-x^2}$
A	$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$
-	$\frac{1}{x^2-1}$
B	$\frac{1}{x^2-4}$

c)

Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, die in x = 3 eine Polstelle mit VZW, in x = -1 eine doppelte Nullstelle und eine Asymptote bei y = 4 besitzt.

Lösung: $$f(x) = \frac{4\cdot(x+1)^2}{x\cdot(x-3)}$$

Lösung zu Test 2 vom 29.10.2019

Aufgabe 1: Ableitungen

Lösung:

$$g'(x) = 10\cdot\left(3x^2-4x\right)^9\cdot(6x-4)$$

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{4x}+4\cdot\sqrt{x}\cdot e^{4x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+4\cdot\sqrt{x}\right)\cdot e^{4x}$$

$$t'(x) = 2\cdot\cos(x)\cdot\left[-\sin(x)\right]$$

Aufgabe 2: Wurzelfunktion I

Geben sei folgende Funktion: $f(x) = x-3-4\sqrt{x}$

Lösung:

Schnittstellen mit den beiden Koordinatenachsen

$$f(0) = 0-3-4\sqrt{0} = -3 \rightarrow S_y(0 \mid -3)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow 0 = x-3-4\sqrt{x}$$

$$\text{Lösung } 1: \quad \text{Substitution} \rightarrow u=\sqrt{x}$$

$$u^2-4u-3 = 0 \rightarrow u_1=4,65 \vee u_2=-0,65 \rightarrow x\approx 21,58$$

$$\text{Lösung } 2: \quad \text{Separieren und quadrieren}$$

$$x-3 = 4\sqrt{x} \rightarrow x^2-6x+9 = 16x \rightarrow x^2-22x+9 = 0$$

$$\rightarrow x_1=21,58 \vee x_2=0,42 \rightarrow x\approx 21,58 \text{ wegen Definitionsbereich}$$

Beurteilen Sie die Symmetrieeigenschaft(en)

⇨ Keine Symmetrie, wegen Definitionsbereich

Extrema (Bitte vollständiger Nachweis!)

$$f'(x) = 1-0-\frac{4}{2\cdot\sqrt{x}} = 1-\frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x=4$$

$$f''(x)=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}} \rightarrow f''(4)=\frac{1}{\sqrt{4^3}}=\frac{1}{8}>0 \rightarrow TP$$

$$f(4) = 4-3-4\sqrt{4} = -7 \rightarrow Min(4 \mid -7)$$

Aufgabe 3: Steigungen

Gegeben sie die Funktion $f(x) = \sqrt{16 - \frac{1}{2}x^2}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{-x}{2 \cdot \sqrt{16 - \frac{1}{2}x^2}} = 2 \rightarrow -x = 4 \cdot \sqrt{16 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\xrightarrow{quadrieren} x^2 = 16 \cdot \left(16 - \frac{1}{2}x^2\right) \rightarrow 9x^2 = 256$$

$$\rightarrow x^2 = 28{,}44 \rightarrow |x| = 5{,}33 \rightarrow L = \{-5{,}33\}$$

Probe durchführen, da beim Quadrieren der Lösungbereich der Gleichung erweitert wird.

Aufgabe 4: Gebrochen-rationale Funktionen

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{0{,}5x + 2}$

Lösung:

Berechnen Sie Polstellen, Nullstellen und Lücken (falls vorhanden).

Zählernullstellen: $0 = x(x-5) \rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 5 \rightarrow$ Nullstellen der Funktion

Nennernullstellen: $0 = 0{,}5x + 2 \rightarrow x = -4 \rightarrow$ Polstelle m.VZW

keine Lücke vorhanden

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 5(-x)}{0{,}5(-x)+2} = \dfrac{x^2+5x}{-0{,}5x+2} \neq f(x) \\ f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 5(-x)}{0{,}5(-x)+2} = \dfrac{x^2+5x}{-0{,}5x+2} \neq -f(x) \end{array}\right\} \rightarrow \textit{keine Symmetrie}$$

Ermitteln Sie die Asymptote und den Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\textit{Asymptote}: \quad \textit{Polynomdivision} \rightarrow a(x) = 2x - 18$$

Grenzwertverhalten mittels L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x}{0{,}5x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 5}{0{,}5} \rightarrow \pm\infty$$

Wie lauten die Extremwert**stellen** der Funktion (notwendige Bedingung genügt – d.h. 1. Ableitung)?

$$f'(x) = \frac{(2x-5)\cdot(0,5x+2)-(x^2-5x)\cdot 0,5}{(0,5x+2)^2} = \frac{x^2+4x-2,5x-10-0,5x^2+2,5x}{(0,5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0,5x^2+4x-10}{(0,5x+2)^2} = 0 \rightarrow x_1=-10 \vee x_2=2$$

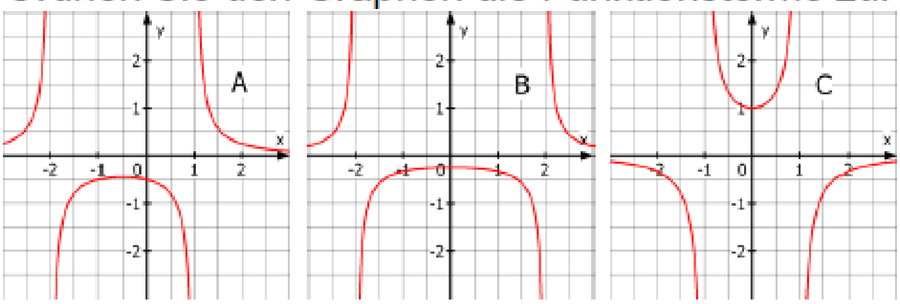
Aufgabe 5:

a)

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?		Wahr	Falsch
a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.	a)	☒	☐
b) Hat f eine Polstelle bei x_0, so gilt $f(x_0) = \infty$.	b)	☐	☒
c) Hat f eine Polstelle bei x_0, so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.	c)	☒	☐
d) Hat f die Definitionslücke x_0, so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.	d)	☐	☒

b)

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



C	$\frac{1}{1-x^2}$
A	$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$
-	$\frac{1}{x^2-1}$
B	$\frac{1}{x^2-4}$

c)

Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, die in x = 3 eine Polstelle mit VZW, in x = -1 eine doppelte Nullstelle und eine Asymptote bei y = 4 besitzt.

Lösung: $$f(x) = \frac{4\cdot(x+1)^2}{x\cdot(x-3)}$$