12. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 08.10.2021
Kurs 12/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungsregeln; Summenzeichen**
Kurvenscharen ganzrat. Fkt.

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Kurvendiskussion Scharkurve (ganzrational)** | 46 | |

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{4}kx^4 + x^3 \quad mit \quad k > 0$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion **nur eine Extremwertstelle** besitzt, **geben Sie diese an und** berechnen Sie die **Ortskurve der Maxima**.

c) Ermitteln Sie die Wendepunkte der Funktion.

d) Beweisen Sie die Behauptung:
Im Ursprung besitzt die Funktion immer einen Sattelpunkt.

e) Geben Sie die Monotonieintervalle und das entsprechende Verhalten an.

f) Zeichnen Sie die Funktion und deren 1. Ableitung in ein KO-System für k = 1.

g) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks, für dessen Eckpunkte folgendes gilt:
A(1/0); **B**: Nullstelle der Funktion mit x > 1 und **C**: Koordinate des Extremums der Funktion
(i) allgemein ***(ii) für k = 2***

h) Wie lautet die Tangentengleichung an der Stelle $x = \frac{2}{k}$?

Aufgabe 2: **Ganzrationale Funktion mit Parameter** | 8 | |

Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x) = x^4 - kx^2 - 4 \quad mit\ k > 0$.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) der Funktion in Abhängigkeit von k.

b) Für welchen Wert von k hat die Funktion die Nullstelle **x = 2**?

Aufgabe 3: **Ableitungen** | 12 | |

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung
und vereinfachen Sie den Term dann so weit wie möglich bzw. sinnvoll:

a) $f(x) = \sum_{k=1}^{3}\left(2x^k - 5\right)$ b) $f_k(x) = kx^2\left(3k^2x - 5\right)$

c) $f_k(x) = \frac{kx^2 + x^3}{x^4}$ d) $f_k(x) = x^{2k-3} - \frac{2}{k^2}x^{k^3}$

Aufgabe 4: **Anwendungen zur Differentialrechnung**

20	

Eine 100 cm hohe und 70 cm breite Regentonne (kreisförmiger Behälter; Zylinder) wird durch eine Ablassöffnung entleert.

Die Höhe des h des Wasserstandes kann durch die Funktion

$$h(t) = \frac{1}{18}t^2 - 5t + 100$$

modelliert werden. ***t ist dabei die Zeit in Minuten und h die Höhe in cm.***

a) Nach welcher Zeit steht das Wasser nur noch 30 cm hoch?

b) Wann ist das Wasser ganz abgelaufen?

c) Wie hoch ist der Wasserstand nach 6 Minuten?

d) Wie viel Wasser läuft in den ersten 6 Minuten insgesamt ab?
Anmerkung: Die Volumenformel für einen Zylinder lautet: $V = r^2\pi \cdot h$

e) Wie schnell ändert sich der Wasserstand zum Zeitpunkt **t** = 3?
Anmerkung: Bitte mit der 1. Ableitung ermitteln.

f) Warum ist der Definitionsbereich $t \in [0\,;30]$ nur sinnvoll?

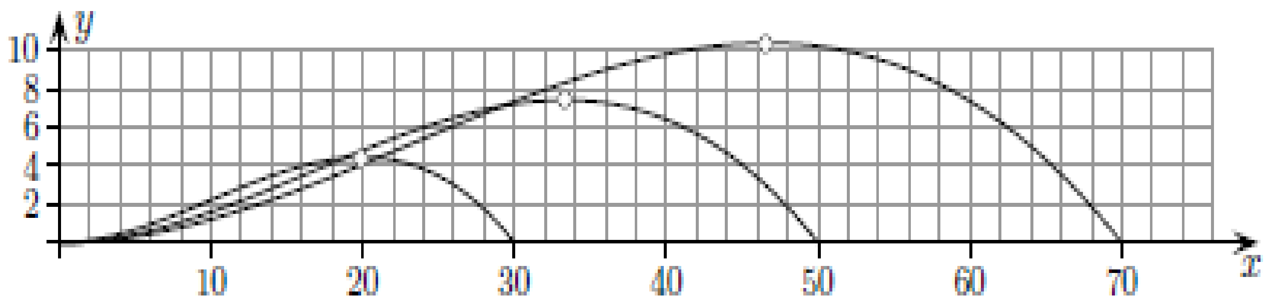
Aufgabe 5: **Deichanalysen**

12	

Querschnitte von Deichen können durch die Deich-Funktionenschar

$$deich_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2 \quad mit\ k > 0$$

modelliert werden.



a) Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen anhand der Nullstelle(n) den Wert von k zu.

b) Zeigen Sie, dass die Steigung der Graphen der Funktionenschar in den Nullstellen von k unabhängig ist.

Aufgabe 6: **Behauptungen zu ganzrationalen Funktionen**

12	

Entscheiden Sie, ob folgende Behauptungen wahr oder falsch sind.

Erstellen Sie für jede Aussage ein Beispiel oder ein Gegenbeispiel, welches Ihre Entscheidung dokumentiert.

Behauptung 1:
Jede Funktion zweiten Grades hat mindestens eine Nullstelle.

Behauptung 2:
Ein Extrempunkt besitzt immer eine waagrechte Tangente.

Behauptung 3:
Jede Funktion dritten Grades hat immer zwei Extremwertstellen.

Behauptung 4:
Der Grad der Ableitung einer Funktion ist immer kleiner als der Grad der Funktion selbst.

Zusatzaufgabe: **Fallunterscheidung bei Parametern**

6	

Bei der Nullstellenberechnung einer Funktion erhält man folgendes Ergebnis:

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{2k^2 - 8}}{2}$$

Für welche Werte von k hat die Funktion

a) eine Nullstelle? b) keine Nullstelle? c) zwei Nullstellen?