12. Jgst.	2. Kursarbeit	Datum: 17.12.2021
Kurs 12/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungsregeln; Rekonstruktion; Kurvenscharen; Extremwertaufgaben**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Anmerkung: ***Wählen Sie aus den Aufgaben 1 und 2 bitte nur eine zur Bearbeitung aus!***

Aufgabe 1: **Kurvendiskussion Scharkurve (ganzrational)** **30**

Gegeben sei folgende Funktion: $f_t(x) = x^3 - 3tx^2 \quad mit\ t > 0$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen.
b) Zeigen Sie, dass die Funktion immer genau zwei Extrema besitzt und bestimmen Sie diese.
c) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion.
d) Wie lautet die Gleichung der Ortskurve der Extrema?
e) Für welchen Wert von t liegt das Minimum an der Stelle x = 4?
f) Ermitteln Sie den Wert von t für den gilt
Der Graph von f an der Stelle x = 2 ist parallel zur Ursprungsgeraden y = 4x?

Lösung:

$$f_t(x) = x^3 - 3tx^2 \quad mit\ t > 0$$

$$Nullstellen: \quad f_t(x) = (x-3t)x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0[doppelt]\, und\ x_2 = 3t$$

$$Extrema:$$

$$f_t'(x) = 3x^2 - 6tx = 0 \quad \rightarrow \quad (3x-6t)x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\ und\ x_2 = 2t$$

$$f_t''(x) = 6x - 6t \quad \rightarrow \quad f_t''(0) = -6t < 0 \quad \rightarrow \quad Max(0 \mid 0) \quad und \quad Min(2t \mid -4t^3)$$

$$Wendepunkt:$$

$$f_t''(x) = 6x - 6t = 0 \quad \rightarrow \quad x = t$$

$$f_t'''(x) = 6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad W(t \mid -2t^3)$$

$$Ortskurve\ der\ Extrema:$$

$$Min(2t \mid -4t^3) \quad \rightarrow \quad x = 2t \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad y = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^3 = -\frac{1}{2}x^3$$

Für welchen Wert von t liegt das Minimum an der Stelle x = 4?

$$Min\left(2t \mid -4t^3\right) \quad \rightarrow \quad x = 2t \quad \rightarrow \quad 4 = 2t \quad \rightarrow \quad t = 2$$

Der Graph von f an der Stelle x = 2 ist parallel zur Ursprungsgeraden y = 4x?

$$f_t'(x) \;=\; 3x^2 - 6tx = m \quad \rightarrow \quad f_t'(2) \;=\; 12 - 12t = 4 \quad \rightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2: **Gebrochen-rationale Funktionen**

30	

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x - 8}$

a) Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen und Lücken.

b) Wie lautet die vereinfachte Funktion $f^*(x)$?

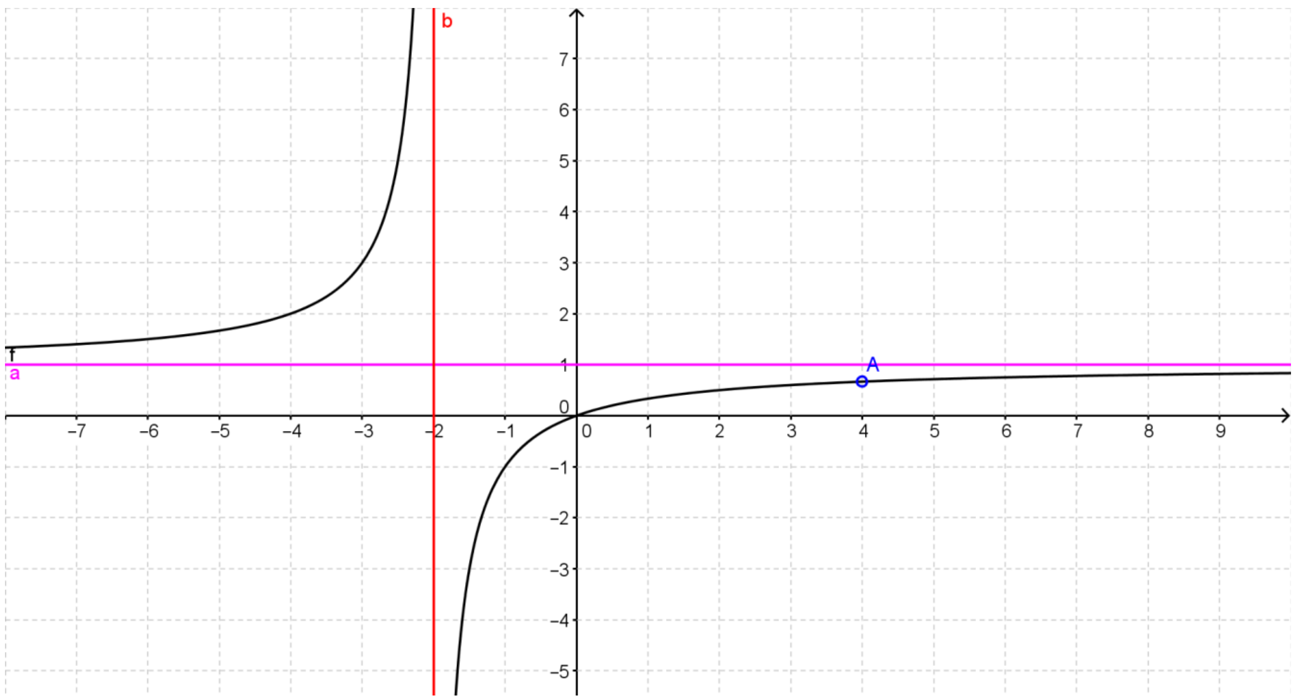
c) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen der Funktion wie folgt lauten können:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \qquad und \qquad f''(x) = \frac{-4}{(x+2)^3}$$

d) Was können Sie aus den Ableitungen bezüglich der Extrema und Wendepunkte folgern?

e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

Lösung:



$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-2x-8} = \frac{x(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

$$Zählernullstellen: \quad (x-4)x=0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 4$$

$$Nennernullstellen: \quad x^2-2x-8=0 \quad \xrightarrow[x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}]{abc-Formel} \quad x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4$$

$$Polstelle\ mit\ VZW: x_1 = -2 \quad Nullstelle\ der\ Funktion: x_1 = 0 \quad Lücke: \left(4 \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$$

$$Asymptote: \xrightarrow[Nennergrad]{Zählergrad=} a(x) = 1$$

$$f^*(x) = \frac{x(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x}{(x+2)}$$

$$Ableitungen:$$

$$\frac{df^*(x)}{dx} \overset{Quotientenregel}{=} \frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} = 2\cdot(x+2)^{-2}$$

$$\frac{d^2f^*(x)}{dxdx} = (-2)\cdot 2\cdot(x+2)^{-3} = (-4)\cdot(x+2)^{-3} = -\frac{4}{(x+2)^3}$$

Es gibt weder Extrema noch Wendepunkte da die notwendigen Kriterien

$f'(x)=0 \quad und \quad f''(x)=0$ nicht erfüllt werden können.

f) Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, die in x = 3 eine Polstelle mit VZW, in x = -1 eine doppelte Nullstelle und eine Asymptote bei y = 4 besitzt.

Lösung: $$f(x) = \frac{4(x+1)^2}{x(x-3)}$$

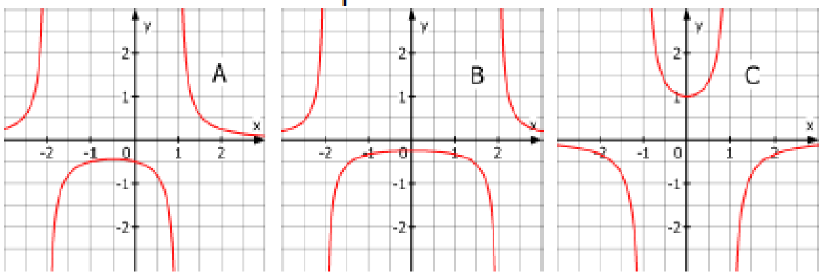
Aufgabe 3: **Gebrochen-rationale Funktionen in der Auswahl** | 10 | |

a)

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?		Wahr	Falsch
a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.	a)	☐	☐
b) Hat f eine Polstelle bei x_0, so gilt $f(x_0) = \infty$.	b)	☐	☐
c) Hat f eine Polstelle bei x_0, so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.	c)	☐	☐
d) Hat f die Definitionslücke x_0, so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.	d)	☐	☐

b)

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



___ $\frac{1}{1-x^2}$

___ $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

___ $\frac{1}{x^2-1}$

___ $\frac{1}{x^2-4}$

Lösung: **W – F – W – F** **und** **C – A- / - B**

Aufgabe 4: **Ableitungen**

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung und vereinfachen Sie den Term dann so weit wie möglich bzw. sinnvoll:

| 15 | |

a) $f(x) = \sqrt{2x^k - 5}$

b) $f_k(x) = \frac{kx^2}{3k^2x - 5}$

c) $f_k(x) = \left(\frac{kx^2}{x-1}\right)^{100}$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{2x^k - 5} = \left(2x^k - 5\right)^{0,5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(2x^k - 5\right)^{-0,5}\cdot 2kx^{k-1} = \frac{kx^{k-1}}{\sqrt{2x^k - 5}}$$

$$f_k'(x) = \frac{2kx\cdot\left(3k^2x - 5\right) - kx^2\cdot 3k^2}{\left(3k^2x - 5\right)^2} = \frac{6k^3x^2 - 10kx - 3k^3x^2}{\left(3k^2x - 5\right)^2} = \frac{3k^3x^2 - 10kx}{\left(3k^2x - 5\right)^2}$$

$$f_k'(x) = 100\left(\frac{kx^2}{x-1}\right)^{99}\cdot\frac{2kx\cdot(x-1)-kx^2}{(x-1)^2} = 100\left(\frac{kx^2}{x-1}\right)^{99}\cdot\frac{kx^2-2kx}{(x-1)^2}$$

10	

$$f_k'(x) = 100\left(\frac{kx^2}{x-1}\right)^{99}\cdot\frac{kx(x-2)}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 5: Rekonstruktion I

Ein geübter Golfspieler plant, durch einen Abschlag im Winkel von 45° den Ball direkt in das 120 m entfernte Loch zu spielen.
Nach dem Abschlag beschreibt der Ball eine parabelförmige Flugbahn.
30 m vor dem Loch steht in direkter Linie zwischen dem Abschlagplatz und dem Loch ein 20 m hoher Baum.
Kann der Schlag gelingen?

12	

Lösung:

$$f(x) = ax^2+bx+c \quad und \quad f'(x) = 2ax+b$$

$$\left.\begin{array}{lll} i) & f(0)=0 & \to \quad c=0 \\ ii) & f'(0)=1 & \to \quad b=1 \\ iii) & f(120)=0 & \to \quad 14.400a+120=0 \end{array}\right\} \quad f(x) = -\frac{1}{120}x^2+x$$

$$f(90) = -\frac{1}{120}\cdot 8.100+90 = 22{,}5 > 20$$

Aufgabe 6: Rekonstruktion I

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Punkt P(0/-1) ein Extremum und im Punkt Q(1/0) einen Sattelpunkt.
Bilden Sie die notwendigen Ansätze und ermitteln Sie die Funktionsgleichung?

Lösung:

$$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

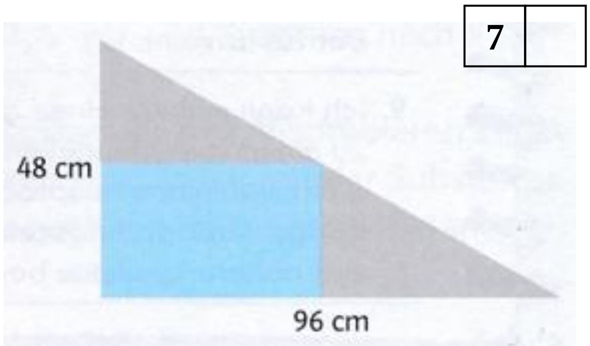
$$f'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d \quad und \quad f''(x) = 12ax^2+6bx+2c$$

$$\left.\begin{array}{lll} i) & f(0)=-1 & \to \quad e=-1 \\ ii) & f'(0)=0 & \to \quad d=0 \\ iii) & f(1)=0 & \to \quad a+b+c-1=0 \\ iv) & f'(1)=0 & \to \quad 4a+3b+2c=0 \\ v) & f''(1)=0 & \to \quad 12a+6b+2c=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} a=3 \\ b=-8 \\ c=6 \end{array}\right\} \quad f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$$

Aufgabe 7: **Extremwertaufgabe I**

7	

Aus einem dreieckigen Stück Stoff möchte Elisa ein möglichst großes Rechteck ausschneiden, um daraus eine Tasche zu nähen.
Welche Seitenlängen muss das rechteckige Stoffstück besitzen, damit der Flächeninhalt maximal wird?



Lösung:

$$Zielfunktion: \quad A(x/y) = x \cdot y \xleftarrow{NB} NB: y = 48 - \frac{48}{96}x = 48 - \frac{1}{2}x$$

$$\xrightarrow[einsetzen]{NB} A(x) = x \cdot \left(48 - \frac{1}{2}x\right) = 48x - \frac{1}{2}x^2$$

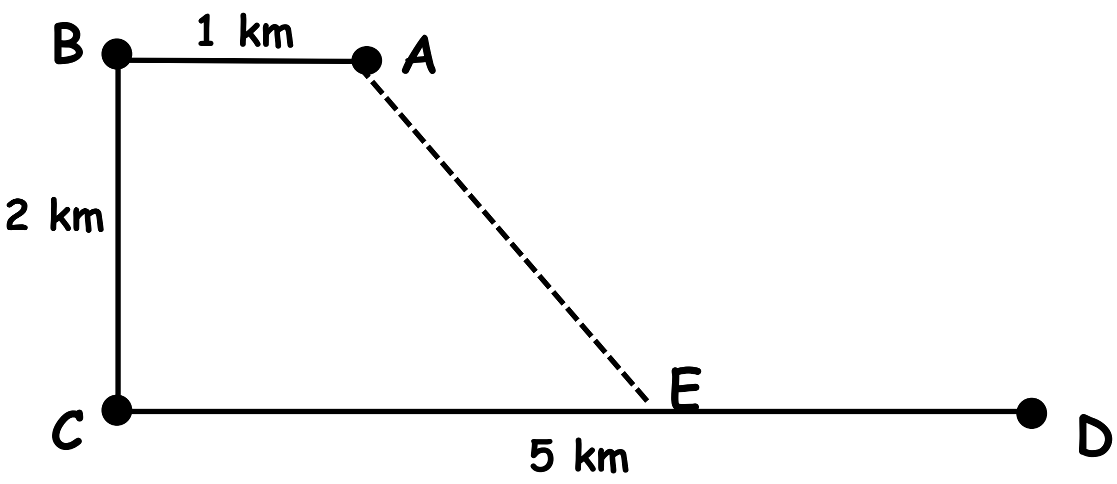
$$\xrightarrow{Ableitung} A'(x) = 48 - x = 0 \rightarrow x = 48$$

$$\xrightarrow{Kontrolle} A''(x) = -1 < 0 \rightarrow Max(48 \quad 24 \quad 1.152)$$

Aufgabe 8: **Extremwertaufgabe II**

16	

Der Landwirt Ludwig Knödel möchte zu seinem (**A**)ussiedlerhof einen schnellen Internet-Anschluss über Glasfaserkabel legen lassen.
Da sich sein Hof einige Kilometer vom nächsten Anschlusspunkt **D** befindet, verlangt der Interdienstleister eine Selbstbeteiligung für den Anschluss:
je 500,00 € je km entlang bestehender Straßen und befestigter Wege;
je 750,00 € je km bei Verlegung im offenen Gelände.
Zu Knödels Hof gelangt man vom Anschlusspunkt **D** gemäß der Skizze auf bestehenden Straßen und Wegen zum Gehöft.



Ludwig Knödel überlegt nun folgende Alternative für den Verlauf des Glasfaseranschlusses:

a) entlang bestehender Straßen und Wege von D über C und B nach A.
b) direkt über das freie Gelände von D nach A.
c) von D Richtung C entlang der Straße, aber an einem Punkt E direkt zu seinem Hof A.

Wie hoch fällt in diesen drei Varianten jeweils die Selbstbeteiligung für Knödel aus?
Wie viel kostet die günstigste Variante?

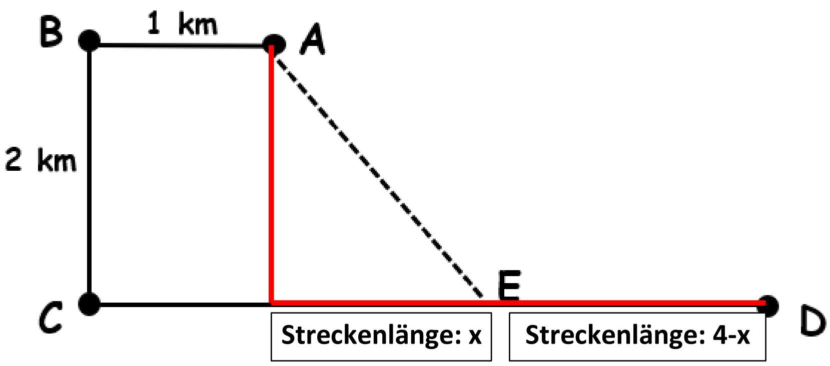
Lösung:

a) $K_1 = 8 \cdot 500{,}00 = 4.000{,}00[€]$

b) $Strecke \quad \overline{DA} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 20$

$K_2 = \sqrt{20} \cdot 750{,}00 = 3.354{,}10[€]$

c)



$$Strecke \quad \overline{AE} = \sqrt{4 + x^2} \quad und \quad \overline{DE} = 4 - x$$

$$f(x) = \sqrt{4 + x^2} \cdot 750 + (4 - x) \cdot 500 = \left(4 + x^2\right)^{0,5} \cdot 750 + 2.000 - 500x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{4 + x^2}} \cdot 750 - 500 = 0$$

$$\rightarrow \quad 750x = 500 \cdot \sqrt{4 + x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}x = \sqrt{4 + x^2} \xrightarrow{Quadrieren} \frac{9}{4}x^2 = 4 + x^2$$

$$\xrightarrow{-x^2} \frac{5}{4}x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad |x| = \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{3{,}2}$$

$$K_3 = \sqrt{4 + 3{,}2} \cdot 750 + \left(4 - \sqrt{3{,}2}\right) \cdot 500 = \sqrt{7{,}2} \cdot 750 + 2{,}21 \cdot 500 = 3.118{,}03[€]$$

Die Option c) ist die günstigste Variante.