12. Jgst.	1. Test	Datum: 24.09.2021
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Summenzeichen; Ganzrat. Kurvenscharen; Ortskurve; Ableitungen**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Summenzeichen** **18**

Schreiben Sie die Summen ohne das Summenzeichen und bilden Sie die Summanden

a) $\sum_{k=0}^{5} k^2 =$

b) $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{1}{k} =$

Schreiben Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens

c) $1+3+5+7+\ldots+151+153+155 =$

d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{512}-\frac{1}{1.024} =$

Zusatzaufgabe: **6**

Fassen Sie die beiden Summen zusammen durch eine geeignete Indexverschiebung:

$$\sum_{k=2}^{101} k^2 + \sum_{k=1}^{100} \left(k^2+2k\right) =$$

Aufgabe 2: **Ableitungen** | 12 | |

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie so weit wie möglich, so dass nur positive Exponenten resultieren.

a) $f_k(x) = \frac{1}{2}k^4x^n$

b) $f_k(x) = \frac{x^3 + k^2}{x}$

c) $f_k(x) = \frac{k^2}{x^n}$

Aufgabe 3: **Kurvenuntersuchung** | 40 | |

Gegeben sei folgende Funktion: $f_k(x) \quad = \quad x^3 - (k+1)x \quad mit\ k > 0$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion immer genau zwei Extrema besitzt und bestimmen Sie die Extremwert**stellen**.

c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrema.

d) Berechnen Sie den Wendepunkt und begründen Sie, weshalb dieser die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt halbiert.

e) Wie lang ist die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt **für k = 2**?

f) Für welchen Wert von k liegt das Minimum an der Stelle x = 2?

g) Ermitteln Sie den Wert von k für den gilt:
Der Graph von f an der Stelle x = 2 ist parallel zur Ursprungsgeraden y = 8x?

h) Zeigen Sie, dass der Graph von f für verschiedene Werte von k immer genau einen gemeinsamen Punkt besitzt.

i) Für welche beiden Werte von k, sind die Kurvenscharen hier gezeichnet?
Begründen Sie Ihre Behauptung

4

Zusatzaufgabe:

Erläutern Sie die Begriffe notwendige und hinreichende Bedingung eines lokalen Extremums einer Funktion.

Lösungen:

Aufgabe 1: **Summenzeichen** 18

Schreiben Sie die Summen ohne das Summenzeichen und bilden Sie die Summanden

a) $\sum_{k=0}^{5} k^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 0+1+4+9+16+25$ 4

b) $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{1}{k} = -\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 4

Schreiben Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens

c) $1+3+5+7+\ldots+151+153+155 = \sum_{i=1}^{78} 2i-1$ 5

d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{512}-\frac{1}{1.024} = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2^i}(-1)^{i+1}$ 5

$/ \Sigma 18$

Zusatzaufgabe: 6

Fassen Sie die beiden Summen zusammen durch eine geeignete Indexverschiebung:

$$\sum_{k=2}^{101} k^2 + \sum_{k=1}^{100}\left(k^2+2k\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{100} (k+1)^2 + \sum_{k=1}^{100} (k^2+2k) =$$ 2

$$\sum_{k=1}^{100} \left(k^2+2k+1+k^2+2k\right) = \sum_{k=1}^{100} (2k^2+4k+1)$$ 2+2

$/ \Sigma 6$

Aufgabe 2: **Ableitungen** 12

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie so weit wie möglich, so dass nur positive Exponenten resultieren.

a) $f_k(x) = \frac{1}{2}k^4x^n \longrightarrow f_k'(x) = \frac{n}{2}k^4x^{n-1}$ 4

b) $f_k(x) = \frac{x^3+k^2}{x} \longrightarrow f_k'(x) = 2x - \frac{k^2}{x^2}$ 4

c) $f_k(x) = \frac{k^2}{x^n} \longrightarrow f_k'(x) = \frac{-nk^2}{x^{n+1}}$ 4 $/ \Sigma 12$

Aufgabe 3: **Kurvenuntersuchung**

Gegeben sei folgende Funktion: $f_k(x) = x^3 - (k+1)x \quad mit\ k > 0$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion immer genau zwei Extrema besitzt und bestimmen Sie die Extremwert**stellen**.

c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrema.

d) Berechnen Sie den Wendepunkt und begründen Sie, weshalb dieser die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt halbiert.

e) Wie lang ist die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt **für k = 2**?

f) Für welchen Wert von k liegt das Minimum an der Stelle x = 2?

g) Ermitteln Sie den Wert von k für den gilt:
Der Graph von f an der Stelle x = 2 ist parallel zur Ursprungsgeraden y = 8x?

h) Zeigen Sie, dass der Graph von f für verschiedene Werte von k immer genau einen gemeinsamen Punkt besitzt.

i) Für welche beiden Werte von k, sind die Kurvenscharen hier gezeichnet?
Begründen Sie Ihre Behauptung

a) NS: $x\left(x^2 - (k+1)\right) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{k+1}$ 4

b) $f'_k(x) = 3x^2 - (k+1) = 0$

$|x| = \sqrt{\frac{1}{3}(k+1)}$ wegen $k > 0$ ⇝ immer 2 Lösungen

$f''_k(x) = 6x$ ⇝ 2 Extrema (auch wegen PS) 5

c) $3x^2 = k+1 \rightsquigarrow k = 3x^2 - 1$

$$y = x^3 - [(3x^2-1)+1] \cdot x$$

$$y = x^3 - 3x^3$$

$$y = -2x^3$$

4

d) $f_k''(x) = 6x$ $f'''(x) = 6 \neq 0$ $\rightsquigarrow$ WP$(0/0)$

-> halbiert die Strecke wegen PS

5

e) Extremwertstellen $(k=2)$: $|x| = 1$ $f_2(1) = -2$

MIN$(1/-2)$ MAX$(-1/2)$

$$e^2 = [1-(-1)]^2 + [-2-2]^2$$

$$e^2 = 4 + 16$$

$$e^2 = 20 \rightsquigarrow e = \sqrt{20}$$

4

f) $|x| = \sqrt{\frac{1}{3}(k+1)}$

$2 = \sqrt{\frac{1}{3}(k+1)} \rightsquigarrow 4 = \frac{1}{3}(k+1)$

$12 = k+1 \rightsquigarrow k = 11$

4

g) $f_k'(2) = 8$

$f_k'(x) = 3x^2 - (k+1) \rightsquigarrow f_k'(2) = 12 - (k+1) = 8$

$k+1 = 4$

$k = 3$

4

h) $k_1 \neq k_2 \Rightarrow \exists$ ein gemeinsamer Punkt

$$f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)$$

$$x^3 - (k_1+1)x = x^3 - (k_2+1)x$$

$$-(k_1+1)x + (k_2+1)x = 0$$

$$x\left[-k_1 - 1 + k_2 + 1\right] = 0$$

$$x\underbrace{(k_2 - k_1)}_{\neq 0 \text{ wegen Vor.}} = 0$$

$x = 0 \rightsquigarrow P(0|0) \to WP$

6

i) $k = 2$ und $k = 4$

4

Zusatz: notwendig $f'(x) = 0$

hinreichend $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \gtrless 0$