12. Jgst.	1. Test (2. Versuch)	Datum: 01.10.2021
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Summenzeichen; Ganzrat. Kurvenscharen; Ortskurve; Ableitungen**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Summenzeichen

24	

Schreiben Sie die Summen ohne das Summenzeichen und bilden Sie die Summanden

Lösung:

a) $$\sum_{k=0}^{5}\sqrt{k} = \sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5} = 0+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}$$

b) $$\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\frac{1}{k^2} = (-1)^1\frac{1}{1^2}+(-1)^2\frac{1}{2^2}+(-1)^3\frac{1}{3^2}+(-1)^4\frac{1}{4^2} = -1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$$

Schreiben Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens

Lösung:

c) $$2+4+6+8+\ldots+156+158+160 = \sum_{k=1}^{80}2k$$

d) $$\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}-\frac{1}{625}+\frac{1}{3.125}-\frac{1}{15.625} = \sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{5^k}$$

e) Fassen Sie die beiden Summen zusammen durch eine geeignete Indexverschiebung:

Lösung:

$$\sum_{k=3}^{102}(k-2)^2+\sum_{k=1}^{100}\left(-k^2+3k\right) = \sum_{k=3-2}^{102-2}\left[(k+2)-2\right]^2+\sum_{k=1}^{100}\left(-k^2+3k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{100}k^2+\sum_{k=1}^{100}\left(-k^2+3k\right) = \sum_{k=1}^{100}k^2+\left(-k^2+3k\right) = 3\sum_{k=1}^{100}k$$

$$= 3\cdot\frac{100\cdot101}{2} = 15.150$$

Aufgabe 2: **Ableitungen**

6	

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie so weit wie möglich, so dass nur positive Exponenten resultieren.

Lösung:

a) $f_k(x) = \frac{1}{4}k^4x^{2n} \rightarrow f_k'(x) = 2n\cdot\frac{1}{4}k^4x^{2n-1} = \frac{n}{2}k^4x^{2n-1}$

b) $f_k(x) = \frac{k^2}{x^n} = k^2\cdot x^{-n} \rightarrow f_k'(x) = (-n)k^2\cdot x^{-n-1} = (-n)\cdot\frac{k^2}{x^{n+1}}$

Aufgabe 3: **Kurvenuntersuchung**

30	

Gegeben sei folgende ganzrationale Kurvenschar:

$$f_k(x) = \frac{4}{3}x^3 - kx^2 \quad mit\ k > 0$$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen.
b) Zeigen Sie, dass die Funktion immer genau zwei Extrema besitzt und bestimmen Sie die Extremwerte.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Minima.
d) Berechnen Sie den Wendepunkt und begründen Sie, weshalb dieser die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt halbiert.
e) Für welchen Wert von k liegt das Minimum an der Stelle x = 2?
f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für k = 4.

Zusatzaufgabe:

4	

Erläutern Sie die Begriffe lokales und globales Extremum einer Funktion.

Lösung:

Unter einem globalen Extremum versteht man den maximalen oder minimalen Funktionswert auf dem Definitionsbereich der Funktion;
unter dem lokalen Extremum versteht man den maximalen oder minimalen Funktionswert einer Funktion hinsichtlich ihrer lokalen Umgebung; diesen Wert ermittelt man im Normalfall mit der Differentialrechnung im Rahmen der 1. Ableitung und der Steigungs- und Krümmungsverhaltens

Lösung:

$$Nullstellen: \ \frac{4}{3}x^3 - kx^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{4}{3}x - k\right)x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\left[doppelt\right] \quad und \quad x_2 = \frac{3}{4}k$$

$$Extrema:$$

$$f_k'(x) \ = \ 4x^2 - 2kx = 0 \quad \rightarrow \quad (4x - 2k)x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{1}{2}k$$

$$f_k''(x) \ = \ 8x - 2k \xrightarrow{x=0} f_k''(0) \ = \ -2k < 0\left[wegen\ k > 0\right]$$

$$\rightarrow \quad Max(0 \mid 0) \xrightarrow{Stetigkeit} Min\left(\frac{1}{2}k \ \middle| \ -\frac{1}{12}k^3\right)$$

$$Ortskurve\ der\ Minima:$$

$$Min\left(\frac{1}{2}k \ \middle| \ -\frac{1}{12}k^3\right) \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad k = 2x$$

$$Option\,1: Einsetzen\ in\ y-Wert \quad y = -\frac{1}{12}k^3 \xrightarrow{k=2x} y = -\frac{1}{12}(2x)^3 = -\frac{8}{12}x^3 = -\frac{2}{3}x^3$$

$$Option\ 2: Einsetzen\ in\ Funktion \quad f_{k=2x}(x) \ = \ \frac{4}{3}x^3 - (2x)\cdot x^2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^3 = -\frac{2}{3}x^3$$

$$Wendepunkt:$$

$$f_k''(x) \ = \ 8x - 2k = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{4}k \quad und \quad f_k'''(x) \ = \ 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad WP\left(\frac{1}{4}k \ \middle| \ -\frac{1}{24}k^3\right)$$

$$x_m = \frac{0 + \frac{1}{2}k}{2} = \frac{1}{4}k \quad und \quad y = \frac{0 + \left(-\frac{1}{12}\right)k^3}{2} = -\frac{1}{24}k^3 \quad \rightarrow \quad WP\ ist\ Mittelpunkt$$

$$Minimum\ bei\ x = 2:$$

$$Min\left(\frac{1}{2}k \ \middle| \ -\frac{1}{12}k^3\right) \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad k = 4$$

Graph der Funktion für k = 4: