12. Jgst.	3. Test	Datum: 07.01.2022
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Gebr.-rat. Fkt. (K-Disk); Rekonstruktion; Tangenten; Ableitungen**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Ableitungen **8**

Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung zu folgender Funktion: $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

Vereinfachungen bitte nur soweit sinnvoll und …

⇨ ***bei der Quotientenregel bitte den Nenner nicht faktorisieren***

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+3)-(x-1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} = 4(x+3)^{-2}$$

$$f''(x) = 4\cdot(-2)(x+3)^{-3} = -\frac{8}{(x+3)^3}$$

Aufgabe 2: Rekonstruktion **8**

Bilden Sie die gebrochen-rationalen Funktionen aufgrund der Beschreibung (bitte den kleinstmöglichen Grad konstruieren):

a) Pol mit VZW an der Stelle x = 2; Nullstelle bei x = 3; Asymptote: a(x) = 4

Lösung: $f(x) = \frac{4(x-3)}{x-2}$

b) Pol ohne VZW an der Stelle x = - 2; Nullstellen bei x = 4 und x = - 1; Lücke bei L(5/0)

Lösung: $f(x) = \frac{(x-4)\cdot(x+1)\cdot(x-5)^2}{(x+2)^2\cdot(x-5)}$

Aufgabe 3: Analyse zu gebr.-rat. Funktionen **10**

a) Zeigen Sie, dass es sich bei den Schnittpunkten der Graphen von

$f(x) = \frac{4}{x^2}$ und $g(x) = 2-\frac{x^2}{4}$ um Berührpunkte handelt.

Lösung:

Schnittpunkte ermitteln => gleichsetzen der Funktionen

⇨ Danach Steigung an den Schnittstellen berechnen oder
⇨ Gleichsetzen der 1. Ableitungen und Lösung vergleichen oder
⇨ Argumentation über Grad der Schnittstelle

$$f(x) = g(x) \rightarrow \frac{4}{x^2} = 2-\frac{x^2}{4} \rightarrow x^4-8x^2+16=0$$

$$\xrightarrow{\text{Substitution}} u_{1/2} = \frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2} = 4\,[doppelt] \rightarrow |x| = \pm\,2\,[doppelt]$$

doppelte Lösungen wegen Achsensymmetrie

$\rightarrow$ aufgrund der doppelten Lösung, liegt auch bei der Ableitung die gleiche Lösung vor

$\rightarrow$ an den Stellen $|x| = \pm\,2$ liegt daher die gleich Steigung zwischen beiden Funktionen vor

Nachweis:

$$f'(x) = g'(x) \rightarrow \frac{-8}{x^3} = -\frac{2x}{4} \rightarrow 16 = x^4 \rightarrow |x| = \pm\,2$$

Aufgabe 4: **Kurvenuntersuchung zu gebr.-rat. Funktionen** **34**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x}$

Führen Sie eine Kurvenuntersuchung aus, in dem Sie folgende Kriterien analysieren:

a) Bestimmung der Nullstelle(n), Polstelle(n) und Lücke(n) aufgrund der Nullstellenanalyse von Zähler und Nenner.

b) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion.

c) Führen Sie eine Analyse zur Symmetrie der Funktion durch.

d) Bestätigung der folgenden Formen der Ableitungen:

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1-x}{\left(x^2-2x\right)^2} \quad und \quad f''(x) = \frac{6x^2-12x+8}{\left(x^2-2x\right)^3}$$

e) Zeigen Sie, dass die Funktion genau ein Extremum besitzt und bestimmen den Punkt.

f) Begründen Sie die Korrektheit der Aussage: ***Die Funktion besitzt keine Wendestellen!***

g) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion in x = 3.

h) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$, die Polgeraden, die Asymptote und die Tangente in das gegebene Koordinatensystem.

Lösung:

a) $NS:\; x=1[doppelt] \quad Pol:\; x=0[m\,VZW] \quad und \quad x=2[m\,VZW] \quad keine\ Lücke$

b) $a(x) = 1$

c) $$f(-x) = \frac{(-x)^2-2\cdot(-x)+1}{(-x)^2-2\cdot(-x)} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x} \neq f(x) \quad und \quad \neq -f(x)$$

Keine Symmetrie (auch weil im Zähler und Nenner keine Symmetrieeigenschaften vorliegen.

d) Ableitungen

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x)-(x^2-2x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\left[(x^2-2x)-(x^2-2x+1)\right]}{(x^2-2x)^2} = \frac{(2x-2)(x^2-2x-x^2-2x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(-1)}{(x^2-2x)^2} = 2\cdot\frac{1-x}{(x^2-2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2)\cdot(x^2-2x)^2-(2-2x)\cdot 2(x^2-2x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-2x)\cdot\left[(-2)\cdot(x^2-2x)-2\cdot(2-2x)\cdot(2x-2)\right]}{(x^2-2x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+4x+8\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2-2x)^3} = \frac{6x^2-12x+8}{(x^2-2x)^3}$$

e) Extremum: zwei Begründungen

(i) Doppelte Nullstelle bei x = 1

(ii) $f'(x) = 2\cdot\frac{1-x}{(x^2-2x)^2} = 0 \rightarrow x=1$

$$f''(1) = \frac{6-12+8}{(-1)^3} = \frac{2}{(-1)^3} = -2<0 \rightarrow Max(1\mid 0)$$

f)

Beh.: f(x) besitzt keine Wendestelle

Bew.: $f''(x) = \frac{6x^2-12x+8}{(x^2-2x)^3} = 0 \rightarrow 6x^2-12x+8=0$

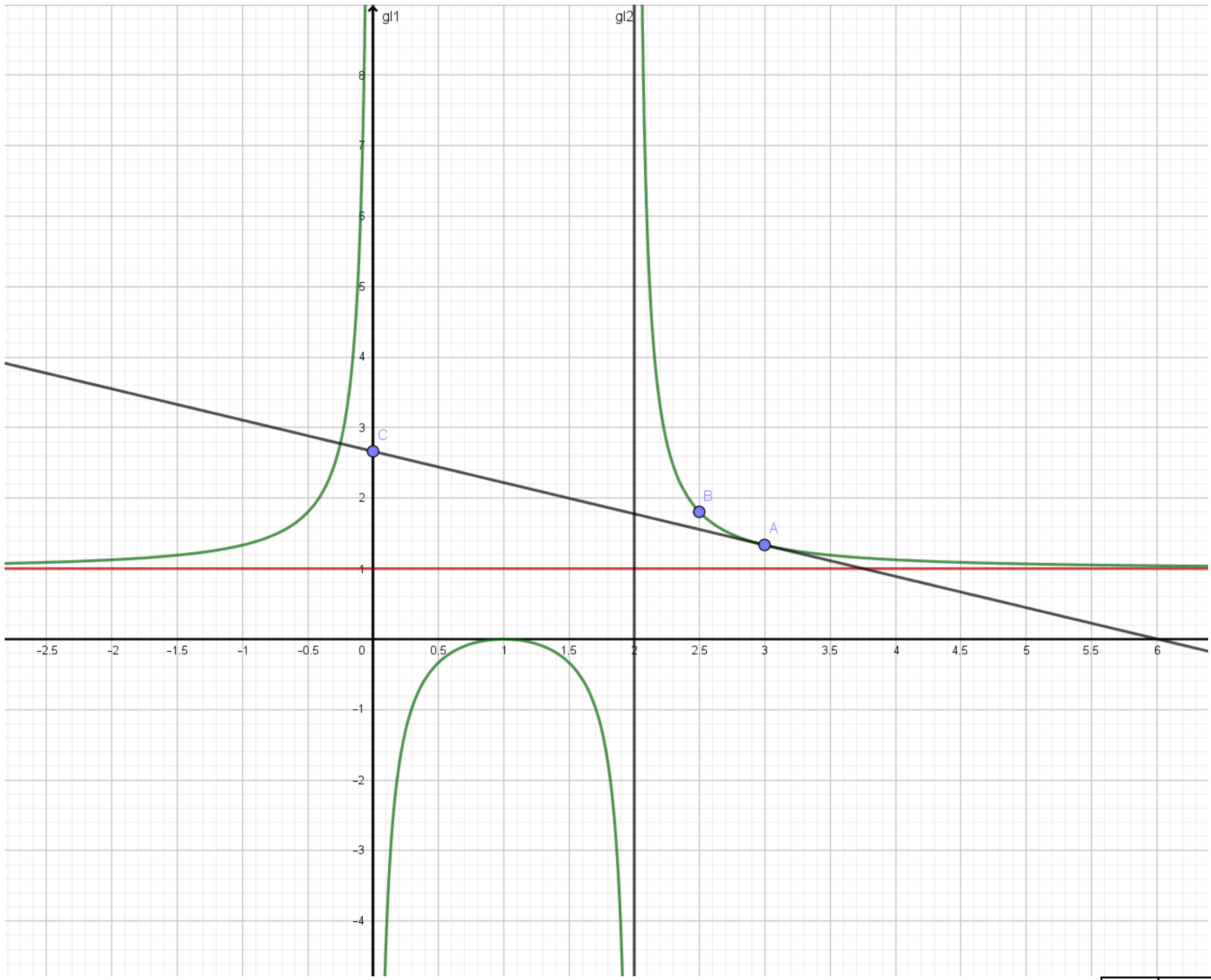
$$\xrightarrow{Diskriminante} D=\sqrt{144-192}=\sqrt{-52} \quad \textit{Widerspruch zu notwendigem Kriterium}$$

g) Tangente in x = 3

$$f(3) = \frac{4}{3} \quad und \quad f'(3) = m = -\frac{4}{9}$$

$$Ermittlung\ y-Achsenabschnitt: \frac{4}{3}=-\frac{4}{9}\cdot 3+b \rightarrow b=\frac{8}{3} \rightarrow t(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{8}{3}$$

h) **Graph der Funktion und Tangente**



Zusatzaufgabe: **6**

Ab welchen ganzzahligen Werten für x ist der Abstand der Funktion zur Asymptote kleiner als $\varepsilon = \frac{1}{1.000}$ **?**

Lösung:

$$d(x) \quad = \quad f(x) - a(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x} - 1 \quad = \quad \frac{1}{x^2 - 2x} \leq 0{,}001$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{1.000} x^2 - \frac{2}{1.000} x \geq 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 1.000 \geq 0$$

$$\rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4.000}}{2} = \frac{2 \pm 63{,}27}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 \geq 32{,}64 \quad und \quad x_2 \leq -30{,}64$$

$$I_1 = \left]-\infty\,;-31\right] \quad und \quad I_2 = \left]33\,;\infty\right]$$