12. Jgst. **3. Kursarbeit** **Datum: 04.03.2022**

Kurs 12/2 **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: **Integral- und Differentialrechnung; K-Disk (gebr.-rat. Funktion)**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die *<u>Menge</u>* der Stammfunktionen

12	

a) $\int (3x+4)^2\,dx \quad =$

$$\int (3x+4)^2\,dx \quad = \quad \int \left(9x^2+24x+16\right)dx$$

$$F(x) \quad = \quad 3x^3+12x^2+16x+c$$

b) $\int x^\pi \cdot a^2 \cdot u\,du \quad = \quad x^\pi \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}u^2+c$

c) $\int x^\pi \cdot a^2 \cdot u\,da \quad = \quad x^\pi \cdot \frac{1}{3}a^3 \cdot u+c$

d) $\int x^\pi \cdot a^2 \cdot u\,dx \quad = \quad \frac{1}{\pi+1}x^{\pi+1} \cdot a^2 \cdot u$

Aufgabe 2: **Rekonstruktion mal anders – Bestimmen Sie unter Beachtung der Zusatzbedingungen die entsprechende Stammfunktion:**

12	

a) $f(-2)=-8 \qquad f'(2)=8 \qquad f''(x)=4x$

$$f''(x)=4x \quad \to \quad F''(x)=f'(x)=2x^2+c \quad \xrightarrow{f'(2)=8} \quad f'(x)=2\cdot 2^2+c=8 \quad \to \quad c=0$$

$$f'(x)=2x^2 \quad \to \quad F'(x)=f(x)=\frac{2}{3}x^3+c \quad \xrightarrow{f(-2)=-8} \quad f(x)=\frac{2}{3}\cdot(-2)^3+c=-8 \quad \to \quad c=-\frac{8}{3}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}$$

b) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch den Ursprung, hat bei x = 1 ein Maximum und bei x = 2 eine Wendestelle. Sie schließt mit der x-Achse über dem Intervall [0 ; 2] eine Fläche vom Inhalt 6 ein. Wie heißt die zugehörige Funktionsgleichung?

Ansätze:

$f(x) \;=\; ax^3+bx^2+cx+d$	$f'(x) \;=\; 3ax^2+2bx+c$
$F(x) \;=\; \frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{2}cx^2+dx$	$f''(x) \;=\; 6ax+2b$

$$\left.\begin{array}{l|l|l} i) & f(0)=0 & d=0 \\ ii) & f'(1)=0 & 3a+2b+c=0 \\ iii) & f''(2)=0 & 12a+2b=0 \\ iv) & F(2)-F(0)=6 & 4a+\frac{8}{3}b+2c=6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3+bx^2+cx \\ f(x) & = & x^3-6x^2+9x \end{array}$$

Aufgabe 3: Integral und Scharparameter

16	

a) Bestimmen Sie die Grenzen des Integrals: $\int_b^{2b} 2x^2 dx = \frac{896}{3}$

Lösung:

$$\left[\frac{2}{3}x^3\right]_b^{2b} = \frac{896}{3} \rightarrow \frac{2}{3}\cdot(2b)^3-\frac{2}{3}\cdot b^3 = \frac{896}{3} \rightarrow \frac{16}{3}\cdot b^3-\frac{2}{3}\cdot b^3 = \frac{896}{3}$$

$$\rightarrow \frac{14}{3}\cdot b^3 = \frac{896}{3} \rightarrow b^3 = 64 \rightarrow b = 4 \rightarrow 2b = 8$$

b) Ermitteln Sie die Werte des Parameters k mit k>0: $\int_0^k \left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{2}{3}k^2$

Lösung:

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right]_0^k = \frac{2}{3}k^2 \rightarrow \frac{1}{3}k^3+\frac{1}{3}k = \frac{2}{3}k^2 \rightarrow \left(k^2-2k+1\right)\cdot\frac{1}{3}k = 0 \rightarrow k=1$$

c) Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = tx^2-4tx \quad mit\ t>0$.
Bestimmen Sie t so, dass die vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $A = \frac{16}{3}$ besitzt.

Nullstellen: $f_t(x) = (x-4)tx = 0 \rightarrow x=0 \quad und \quad x=4$

Flächenberechnung:

$$\left|\int_0^4 f_t(x)dx\right| = \left|\int_0^4 \left(tx^2-4tx\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}tx^3-2tx^2\right]_0^4\right| = \left|\frac{64}{3}t-32t\right| = \frac{16}{3}$$

$$\rightarrow \frac{32}{3}t = \frac{16}{3} \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4: Stammfunktion verkleidet als Textaufgabe | 10 | |

Ein auf Riff gelaufener zylinderförmiger Tank verliert Rohöl durch ein Leck, wobei ein kreisförmiger Ölteppich entsteht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit kann funktional in etwa gemessen werden durch: $\frac{df(t)}{dt} = \frac{8}{\sqrt{t}} \quad mit\ t > 1$, $f(t)$ ist hierbei der Radius des Ölteppichs in Metern nach t Minuten.

Nach einer Minute beträgt der Radius bereits 15 m.

a) Welchen Radius muss man nach 49 Minuten erwarten?
b) Nach welcher Zeit würde der Ölteppich einen Radius von 100 m besitzen?

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \frac{8}{\sqrt{t}} = 8 \cdot t^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f(t) = 16 \cdot t^{\frac{1}{2}} + c = 16 \cdot \sqrt{t} + c$$

$$\xrightarrow{f(1)=15} 16 \cdot 1 + c = 15 \rightarrow c = -1 \rightarrow f(t) = 16 \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1 = 16 \cdot \sqrt{t} - 1$$

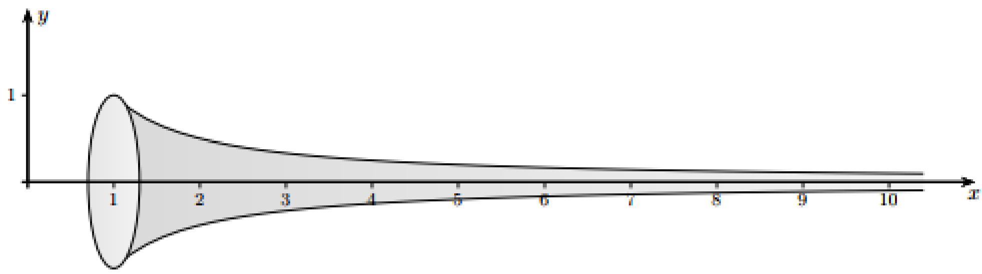
$$\xrightarrow{\text{Radius nach 49 Minuten}} f(49) = 16 \cdot 7 - 1 = 111$$

$$\xrightarrow{\text{Zeit für Radius = 100 m}} f(t) = 16 \cdot \sqrt{t} - 1 = 100 \rightarrow \sqrt{t} = \frac{101}{16}$$

$$\rightarrow t = \left(\frac{101}{16}\right)^2 \approx 39{,}85[\min] \approx 39[\min]51[sek]$$

Aufgabe 5: Uneigentliches Integral und ein Paradoxon - Die Torricelli-Trompete | 12 | |

Rotiert der Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ über dem Intervall $I = [1; \infty[$ um die x-Achse, so entsteht ein trichterförmiges Gebilde, das auch die Torricelli-Trompete genannt wird.



a) Ermitteln Sie den Inhalt der Längsschnittfläche.
b) Berechnen Sie nun das Rotationsvolumen um die x-Achse.
c) Welche paradoxe Situation entstände, wenn man den Trichter mit Farbe füllen würde?

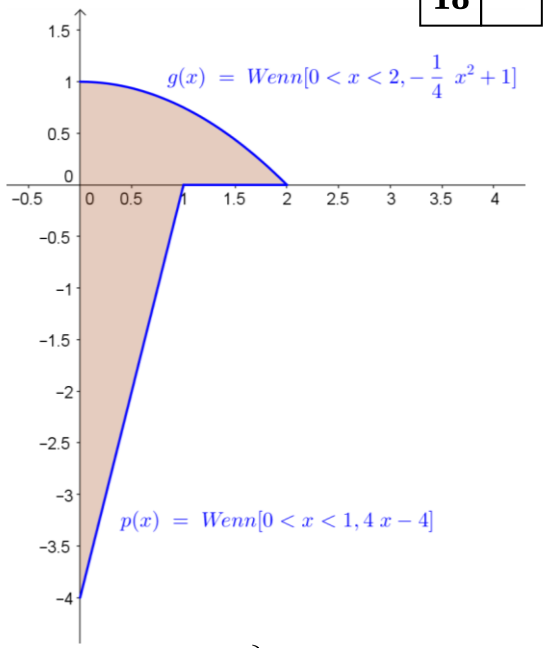
$$A = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \lim_{k \to \infty} \int_1^{k} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \lim_{k \to \infty} \left[\ln|x| \right]_1^k = 2 \cdot \left[\lim_{k \to \infty} \ln|k| - 0 \right] \rightarrow \infty$$

$$V = \pi \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = \pi \cdot \lim_{k \to \infty} \int_1^{k} \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^k = \pi \cdot \left[\lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{k} \right) - (-1) \right] = \pi \cdot [0 + 1] \rightarrow \pi$$

Der Trichter kann mit π VE Farbe/Flüssigkeit gefüllt werden; zum Streichen/Färben der Längsschnittfläche wird die Farbe allerdings nicht ausreichen.

Aufgabe 6: **Flächenberechnung und Rotationsvolumen**

18	



a) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

b) Wie groß ist das Volumen der gefärbten Fläche, wenn diese um die y-Achse rotiert? Welche Volumenform entsteht?

c) Erklären Sie den die Darstellungen und die mind. **drei** notwendigen Umformungsschritte:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[f^{-1}(x) \right]^2 dy \;=\; \ldots \;=\; \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f'(x)\,dx$$

Flächeninhalt der gefärbten Fläche:

$$A_1 = \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + x \right]_0^2 = -\frac{8}{12} + 2 - 0 = \frac{4}{3}$$

$$A_2 \overset{Dreieck}{=} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} A_{ges} = \frac{10}{3}$$

Rotationsvolumen um die y-Achse:

Variante 1:

$$V_1 \overset{x^2 \cdot f'(x)}{=} \pi \cdot \int_0^2 x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x \right) dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 \right) dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{8}x^4 \right]_0^2 \overset{Betrag}{=} 2\pi$$

$$V_2 \overset{x^2 \cdot f'(x)}{=} \pi \cdot \int_0^1 x^2 \cdot 4 dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(4x^2 \right) dx = \pi \cdot \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 \overset{Betrag}{=} \frac{4}{3}\pi$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} V_{ges} = \frac{10}{3}\pi$$

Variante 2:

$$V_1 \overset{x=\sqrt{4-4y}}{=} \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{4-4y} \right)^2 dy = \pi \cdot \int_0^1 (4-4y)\,dy = \pi \cdot \left[4y - 2y^2 \right]_0^1 \overset{Betrag}{=} 2\pi$$

$$V_2 \overset{x=\frac{1}{4}y-1}{=} \pi \cdot \int_{-4}^0 \left(\frac{1}{4}y + 1 \right)^2 dy = \pi \cdot \int_{-4}^0 \left(\frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{2}y + 1 \right) dy$$

$$V_2 = \pi \cdot \left[\frac{1}{48}y^3 + \frac{1}{4}y^2 + y \right]_{(-4)}^0 \overset{Betrag}{=} \frac{4}{3}\pi$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} V_{ges} = \frac{10}{3}\pi$$

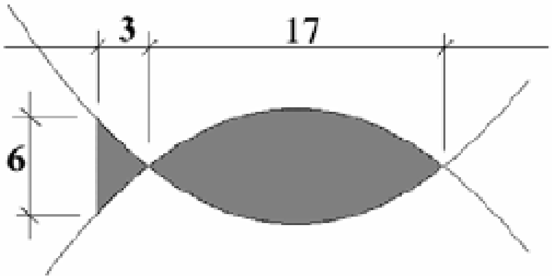
Herleitung:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[f^{-1}(x) \right]^2 dy \overset{x=f^{-1}(x)}{=} \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \underset{\substack{y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2)}}{\overset{f'(x)=\frac{dy}{dx} \;\rightarrow\; f'(x)\cdot dx = dy}{=}} \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f'(x)\,dx$$

10	

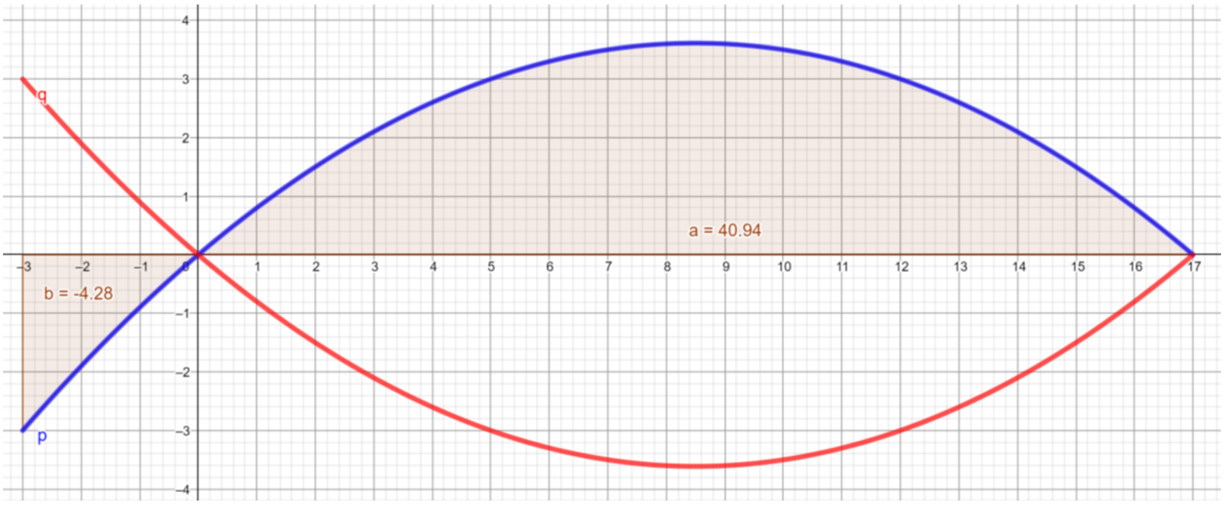
Aufgabe 7: Der Fisch

Der dargestellte „Fisch“ wird durchzwei symmetrische Parabeln begrenzt. Die obere Randkurve kann folgende Form annehmen: $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{17}{20}x$



a) Zeichnen Sie die fehlenden Achsen in das gegebene KO-System ein, ermitteln Sie die Funktionsgleichung der unteren Randfunktion und zeichnen Sie diese ebenfalls in das KO-System.

b) Berechnen Sie die schraffierte Fläche – also den Querschnitt des „Fischs“.



$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{17}{20}x \rightarrow g(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{17}{20}x$$

Fläche:

$$A = 2 \cdot \left[\left| \int_{-3}^{0} \left(-\frac{1}{20}x^2 + \frac{17}{20}x \right) dx \right| + \int_{0}^{17} \left(-\frac{1}{20}x^2 + \frac{17}{20}x \right) dx \right] = 2 \cdot (4,28 + 40,94) = 90,44$$

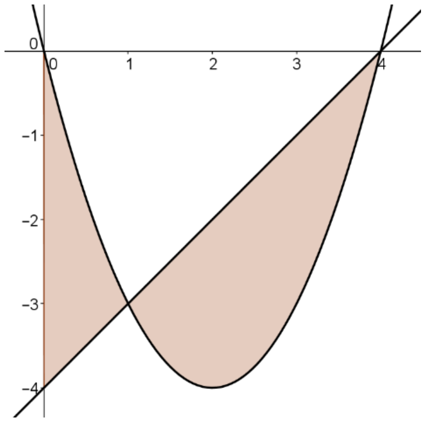
$$\textit{Stammfunktion:} \quad F(x) = -\frac{1}{60}x^3 + \frac{17}{40}x^2$$

Aufgabe 8: Flächeninhalt zwischen Funktionen

14	

a) Bestimmen Sie den Inhalt der von den Graphen der Funktionen f und g im Intervall I = [0 ; 4] eingeschlossenen Fläche:

$$f\left(x\right)=x^2-4x \quad und \quad g\left(x\right)=x-4$$



$$f\left(x\right)=x^2-4x \quad und \quad g\left(x\right)=x-4$$

Schnittstellen:

$$f\left(x\right)=g\left(x\right) \;\to\; x^2-4x=x-4 \;\to\; x^2-5x+4=0 \xrightarrow{x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}} x_1=1 \quad und \quad x_2=4$$

Flächenbereiche mit Differenzfunktion:

$$\int_0^1\left(x^2-5x+4\right)dx+\left|\int_1^4\left(x^2-5x+4\right)dx\right| \overset{F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x}{=} \frac{11}{6}+\frac{9}{2} = \frac{11+27}{6} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

b) Der Graph der Funktion $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^2$ wird von einer Ursprungsgeraden mit positiver Steigung geschnitten. Wie groß ist die Steigung, damit die eingeschlossene Fläche 9 FE beträgt?

$$\textit{Funktion}: \quad f\left(x\right) = \frac{1}{4}x^2 \quad und \quad \textit{Ursprungsgerade}: \quad g\left(x\right) = mx$$

$$\textit{Schnittstellen}: \quad x\left(m-\frac{1}{4}x\right) = 0 \;\to\; x_1=0 \quad und \quad x_2=4m$$

Ansatz:

$$\int_0^{4m}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]dx = \int_0^{4m}\left(mx-\frac{1}{4}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}mx^2-\frac{1}{12}x^3\right]_0^{4m} = 9$$

$$\to\; 8m^3-\frac{64}{12}m^3 = 9 \;\to\; 8m^3-\frac{16}{3}m^3 = 9 \;\to\; \frac{8}{3}m^3 = 9 \;\to\; m = \frac{3}{2}$$

Option: Wählen Sie nun entweder die Aufgaben 9 und 10 oder die Aufgabe 11 zur Bearbeitung.

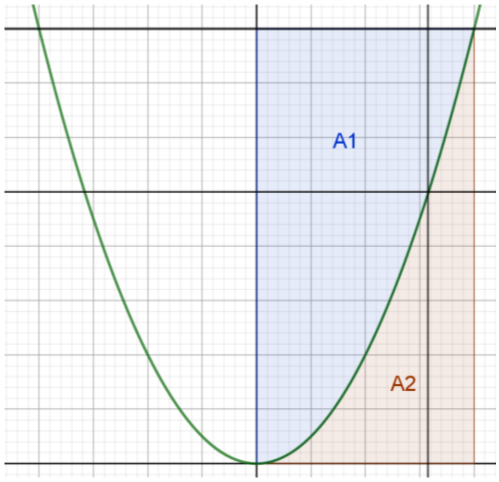
Aufgabe 9: **Halbierung von Flächen**

12	

Die abgebildete Parabel $f(x) = x^2 \quad mit\ x \geq 0$,

die Gerade y = 4 und die y-Achse schließen die Fläche A1 ein.

Die unter der Randfunktion mit der x-Achse im Intervall [0 ; 2] begrenzte Fläche soll A2 genannt werden.



a) In welchem Verhältnis teilt die Funktion f(x) die beiden Flächen zueinander auf?

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Parallelen zur x- und zur y-Achse, wobei die **Parallele zur y-Achse die Fläche A2** und die **Parallele zur x-Achse die Fläche A1** halbiert.

Flächenberechnung:

$f(x) = x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$ => **Rechteck:** **A = 4 * 2 = 8**

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3} \rightarrow A_1 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1}$$

Teilungspunkt:

Ermittlung der senkrechten Teilungsgerade:

$$\frac{1}{2}A_2 = \frac{4}{3} \rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^k = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{3}k^3 = \frac{4}{3} \rightarrow k = \sqrt[3]{4}$$

$$\xrightarrow{\text{Teilungsgerade}} x = \sqrt[3]{4}$$

Ermittlung der wagrechten Teilungsgerade:

Einsetzen des x-Wertes der senkrechten Teilungsgeraden in die Funktion:

$$x = \sqrt[3]{4} \rightarrow f\left(\sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{3}} = \left(4^2\right)\frac{1}{3} = \sqrt[3]{16}$$

Ermittlung des Schnittpunktes der waagrechten Gerade k mit der Funktion f:

$$k = x^2 \rightarrow x = \sqrt{k} \xrightarrow[\textit{Differenzfunktion}]{\textit{Obergrenze}} \int_0^{\sqrt{k}} \left(k - x^2\right)dx = \frac{8}{3}$$

$$\left[kx - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{k}} = \frac{8}{3} \rightarrow k\sqrt{k} - \frac{1}{3}\sqrt{k}^3 = k^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}k^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}} \rightarrow k = \sqrt[3]{16}$$

Aufgabe 10: Rotationsvolumen **14**

Die Funktion $f_k(x) = \dfrac{x^2 - k}{kx} \quad mit\ x \in [1;2] \quad und\ k > 0$ rotiere um die **x-Achse**.

a) Zeigen Sie, dass das Rotationsvolumen folgenden Ausdruck annehmen kann:

$$V(k) = \pi \cdot \left(\frac{7}{3k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \right)$$

Option 1:

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^2 - k}{kx} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^4 - 2x^2k + k^2}{k^2x^2} \right) dx = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^4}{k^2x^2} - \frac{2x^2k}{k^2x^2} + \frac{k^2}{k^2x^2} \right) dx$$

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^2}{k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3k^2}x^3 - \frac{2}{k}x - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \pi \cdot \left[\left(\frac{8}{3k^2} - \frac{4}{k} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{2}{k} - 1 \right) \right]$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{7}{3k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \right)$$

Option 2:

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^2 - k}{kx} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^2}{kx} - \frac{k}{kx} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{x} \right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{x^2}{k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3k^2}x^3 - \frac{2}{k}x - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \pi \cdot \left[\left(\frac{8}{3k^2} - \frac{4}{k} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{2}{k} - 1 \right) \right]$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{7}{3k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \right)$$

b) Bestimmen Sie mittels $V(k)$ den Wert des Parameters k so, dass das Volumen des Rotationskörpers extrem wird.
Ermitteln Sie auch die Art des Extremums.

$$V(k) = \pi \cdot \left(\frac{7}{3k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \right)$$

$$V'(k) = \pi \cdot \left(-\frac{14}{3k^3} + \frac{2}{k^2} \right) = 0 \rightarrow -\frac{14}{3k^3} + \frac{2}{k^2} = 0 \xrightarrow{\cdot k^3} -\frac{14}{3} + 2k = 0 \rightarrow k = \frac{7}{3}$$

$$V''(k) = \pi \cdot \left(\frac{42}{3k^4} - \frac{4}{k^3} \right) \rightarrow V''(k) = \pi \cdot \left(\frac{14}{k^4} - \frac{4}{k^3} \right)$$

$$\rightarrow V''\left(\frac{7}{3} \right) = \pi \cdot \left(\frac{14}{\left(\frac{7}{3} \right)^4} - \frac{4}{\left(\frac{7}{3} \right)^3} \right) = \frac{54}{343} > 0 \rightarrow Minimum$$

Aufgabe 11: Kurvenuntersuchung gebrochen-rationaler Funktionen | 26 | |

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) \;=\; \dfrac{x^2 - kx}{x - 2} \quad mit\ k > 0$

a) Bestimmen Sie die Polstellen, Lücken und Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit des Parameters k.
Führen Sie eine Fallunterscheidung mit k < 2, k = 2 und k > 2 durch.

Zählernullstelle(n): x = 0 und x = k **Nennernullstelle(n): x = 2**

Fall 1: k < 2
Nullstellen bei x = 0 und x = k **Polstelle: x = 2 (m VZW)**

Fall 2: k = 2
Nullstellen bei x = 0 und Lücke bei x = 2 **f*(x) = x**

Fall 3: k > 2
Nullstellen bei x = 0 und x = k **Polstelle: x = 2 (m VZW)**

b) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen folgende Form annehmen können:

$$f_k'(x) \;=\; \frac{x^2 - 4x + 2k}{(x-2)^2} \quad und \quad f_k''(x) \;=\; \frac{8 - 4k}{(x-2)^3}$$

$$f_k'(x) \;=\; \frac{(2x-k)(x-2) - (x^2 - kx)\cdot 1}{(x-2)^2} \;=\; \frac{2x^2 - 4x - kx + 2k - x^2 + kx}{(x-2)^2} \;=\; \frac{x^2 - 4x + 2k}{(x-2)^2}$$

$$f_k''(x) \;=\; \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 2k)\cdot 2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} \;=\; \frac{(x-2)\cdot\left[(2x-4)(x-2) - (2x^2 - 8x + 4k)\right]}{(x-2)^4}$$

$$f_k''(x) \;=\; \frac{2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 8x - 4k}{(x-2)^3} \;=\; \frac{8 - 4k}{(x-2)^3}$$

c) Warum besitzt die Funktion keine Wendepunkte?

$$notwendiges\ Kriterium: \quad f_k''(x) \;=\; \frac{8 - 4k}{(x-2)^3} \;=\; 0$$

$$\xrightarrow{\cdot\, Nenner} \; 8 - k \;=\; 0\left[Widerspruch,\ keine\ Lösung\ \ für\ x\right]$$

d) Zeigen und begründen Sie, dass nur für k < 2 Extrema bei der Funktion existieren.

$$notwendiges\ Kriterium: \quad f_k'(x) \;=\; \frac{x^2 - 4x + 2k}{(x-2)^2} \;=\; 0$$

$$\text{Ermittlung Diskriminante}: \quad D = 16 - 8k > 0 \;\rightarrow\; 16 > 8k \;\rightarrow\; k < 2$$

e) Bestimmen Sie das Extremum der Funktion und die Art für **k = 1**.

$$f_1'(x) = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$f_1''\left(2+\sqrt{2}\right) = \frac{8-4}{\left(2+\sqrt{2}-2\right)^3} = \frac{4}{\sqrt{2}^3} > 0 \rightarrow Min$$

$$f_1''\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{8-4}{\left(2-\sqrt{2}-2\right)^3} = -\frac{4}{\sqrt{2}^3} < 0 \rightarrow Max$$

f) Berechnen Sie die Asymptote der Funktion für **k = 1**.

Polynomdivision:

$$\left(x^2-kx\right):\left(x-2\right) = x+\left(2-k\right) + \frac{4-2k}{x-2}$$

$$\underline{-\left(x^2-2x\right)}$$

$$\left(2-k\right)x$$

$$\underline{-\left[\left(2-k\right)x-4+2k\right]}$$

$$4-2k$$

$$Asymptote: \ a_k\left(x\right) = x+\left(2-k\right) \rightarrow a_1\left(x\right) = x+1$$

g) Skizzieren Sie die Funktion mit Polstellen und Asymptote für **k = 1**.