13. Jgst.	2. Test	Datum: 11.11.2022
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: Erwartungswert; Varianz & Standardabweichung; Gewinnspiele – fair?

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Erwartungswert und Varianz berechnen 15

Gegeben ist folgende Tabelle:

g	−10	0	1	3
P(X = g)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$

a) Berechnen Sie für die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle den Erwartungswert $E(X)=\mu$

b) Welchen Wert besitzt die Standardabweichung $\sigma(X)$?

c) Ersetzen Sie den Wert g = 0 in der Tabelle derart, damit E(X) = 0 gilt.

Lösung:

$$E(X)=(-10)\cdot\frac{1}{5}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{2}{15}=-2+0+0,5+0,4=-1,1$$

$$\sigma^2(X)=100\cdot\frac{1}{5}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{2}{15}-1,1^2=20+0+0,5+1,2-1,21=20,49$$

$$\sigma(X)=\sqrt{20,49}=4,527$$

$$E(X)\overset{!}{=}0 \quad\rightarrow\quad -1,1+x\cdot\frac{1}{6}=0 \quad\rightarrow\quad x=6,6$$

Aufgabe 2: Erwartungswert mit Kugeln 15

In einer Urne befinden sich k rote und 10 grüne Kugeln.
Es wird **dreimal mit Zurücklegen** gezogen.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit den Daten aus dem Zufallsexperiment.

b) Vervollständigen Sie die Tabelle:

Anzahl roter Kugeln	**0**	**1**	**2**	**3**
Wahrschein-lichkeit	$\binom{3}{0}\frac{10^3}{(10+k)^3}$	$\binom{3}{1}\frac{k\cdot 10^2}{(10+k)^3}$	$\binom{3}{2}\frac{k^2\cdot 10}{(10+k)^3}$	$\binom{3}{3}\frac{k^3}{(10+k)^3}$

c) Wie viele rote Kugeln sind in der Urne, wenn der Erwartungswert für die Anzahl roter Kugeln 1 beträgt?

Lösung:

$$E(X)=0\cdot\frac{1.000}{(10+k)^3}+1\cdot\frac{300k}{(10+k)^3}+2\cdot\frac{30k^2}{(10+k)^3}+3\cdot\frac{k^3}{(10+k)^3}\overset{!}{=}1$$

$$\rightarrow \quad 300k+60k^2+3k^3=(10+k)^3$$

$$\rightarrow \quad 300k+60k^2+3k^3=1.000+300k+30k^2+k^3$$

$$\rightarrow \quad 2k^3+30k^2-1.000=0 \quad \rightarrow \quad k=5$$

Aufgabe 3: **Gesetzmäßigkeiten zum Erwartungswert und zur Varianz** | 10 | |

Im Buch auf Seite 492 war folgende Aufgabe:

17 Bestimmen Sie näherungsweise den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Augensumme beim Würfeln mit einem, zwei bzw. drei Würfeln pro Wurf.

Im Lösungsbuch wurden nacheinander drei Erwartungswerte und drei Werte für die Varianz in entsprechend umfangreicher und zeitintensiver Form ermittelt.

Schritt 1: **Ein Würfel pro Wurf**

Augensumme a	1	2	3	4	5	6
P(X = a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ergebnis: $E(X)=3{,}5 \quad und \quad \sigma^2(X)=\frac{35}{12}$

Schritt 2: **Zwei Würfel pro Wurf**

Augensumme a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = a)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Schritt 3: **Drei Würfel pro Wurf**

Augensumme	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Wahrschein-lichkeit	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

In jedem Schritt wurde die komplette Berechnung entsprechend der Formeln durchgeführt.

a) Wie hätte man die Lösungen für die Schritte 2 und 3 schneller und trotzdem korrekt bestimmen können, wenn Sie folgende Transformationssystematik und Gesetzmäßigkeiten zugrunde legen würden?

Gesetzmäßigkeiten zur linearen Transformation des Erwartungswertes und der Varianz diskreter Zufallsvariablen

⇨ **Erwartungswert:**

Satz 1: $E(a\cdot X+b) = a\cdot E(X)+b$

Satz 2: $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

Satz. 3: $E(b) = b$

Satz. 4: $E(X\cdot Y) \neq E(X)\cdot E(Y)$

⇨ **Varianz:**

Satz 5: $V(a\cdot X)=a^2\cdot V(X) \quad und \quad V(X+b)=V(X)$

Zusammengefasst: $V(a\cdot X+b) = a^2\cdot V(X)$

Satz 6: $V(X\pm Y) = V(X)\pm V(Y)$

$mit\ Sonderfall:\quad Cov(X;Y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad X;Y\ unabhängig$

b) Geben Sie die Lösungen für die Erwartungswerte, die Varianzen und die Standardabweichungen an.

Lösung:
Zur schnelleren Lösungsfindung können die Sätze 2 und 6 verwendet werden.
Daraus erhält man folgende Ergebnisse:

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

$$\rightarrow \quad E(X)=3,5 \quad und \quad E(Y)=3,5 \quad und \quad E(Z)=3,5$$

$$\rightarrow \quad E(X)_{Schritt\ 2}=7 \quad \rightarrow \quad E(X)_{Schritt\ 3}=10,5$$

$$V(X\pm Y) = V(X)\pm V(Y)$$

$$\rightarrow \quad V(X)=\frac{35}{12} \quad und \quad V(Y)=\frac{35}{12} \quad und \quad V(Z)=\frac{35}{12}$$

$$\rightarrow \quad V(X)_{Schritt\ 2}=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6} \quad \rightarrow \quad V(X)_{Schritt\ 3}=\frac{35}{6}+\frac{35}{12}=\frac{35}{4}$$

$$\rightarrow \quad S(X)_{Schritt\ 2}=\sqrt{\frac{35}{6}} \quad \rightarrow \quad S(X)_{Schritt\ 3}=\sqrt{\frac{35}{4}}$$

15	

Aufgabe 4: **Erwartungswert**

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer **Wahrscheinlichkeit von 80 % ein Tor**.

Tom schießt **vier** Strafstöße.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
   A: Er erzielt vier Tore.
   B: Er erzielt mindestens drei Tore.
   C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

Lösung:

$$P(A) = 0{,}8^4 = 0{,}4096$$

$$P(B) = 0{,}8^4 + \binom{4}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}8192$$

$$P(C) = 2 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}2048$$

Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an:
„Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro,
sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro.
Ansonsten musst du mir 10 Euro geben.“

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

Lösung.

g	1	-2	-10
P(g)	0,8	x	1-0,8-x=0,2-x

$$E(X) \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad 1 \cdot 0{,}8 + (-2) \cdot x + (-10) \cdot (0{,}2 - x) = 0$$

$$\rightarrow \quad 0{,}8 - 2x - 2 + 10x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0{,}15$$