13. Jgst.	4. Test	Datum: 11.01.2023
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Konfidenzintervalle; Mindestumfang Stichprobe; Normalverteilung (ohne/mit Stetigkeitskorrektur)**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1:

26	

Die Brenndauer von Glühlampen sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 900 h und einer Standardabweichung von 100 h.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

a) zwischen 750 und 1050 Stunden.
b) kleiner als 650 Stunden.
c) kleiner als 800 oder größer als 1200 Stunden.

Lösung:

$$P(750 \le X \le 1.050) \underset{Intervall}{\overset{symmetrisches}{=}} 2\Phi(1{,}5)-1 = 2\cdot 0{,}9332-1 = 0{,}8664$$

$$NR: \quad z = \frac{1.050-900}{100} = \frac{150}{100} = 1{,}5$$

$$P(X \le 650) = \Phi(-2{,}5) = 0{,}0062$$

$$NR: \quad z = \frac{650-900}{100} = \frac{-250}{100} = -2{,}5$$

$$P(X \le 800) \cup P(X \ge 1.200) = \Phi(-1) + [1-\Phi(3)] = 0{,}1587 + 0{,}0001 = 0{,}1588$$

$$NR: \quad z_1 = \frac{800-900}{100} = -1 \quad und \quad z_2 = \frac{1.200-900}{100} = 3$$

d) Welche Mindestbrenndauer besitzen die Glühlampen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

Lösung:

$$P(X \ge k) = 0{,}95 \quad \rightarrow \quad 1-P(X<k) = 0{,}95 \quad \rightarrow \quad P(X<k) = 0{,}05$$

$$NR: \quad -1{,}65 = \frac{k-900}{100} \quad \rightarrow \quad k = 735$$

Der Hersteller behauptet, dass mindestens 98 % seiner Glühlampen eine Brenndauer von 1100 Stunden haben.
Bei einer Stichprobe von 1.000 Glühlampen konnte bei 965 eine Brenndauer von 1100 Stunden oder länger festgestellt werden.

e) Kann man mittels dieser Stichprobe mit einer Sicherheit von 90 % die Behauptung des Herstellers bestätigen?

Lösung:

$$\rightarrow \quad p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1 - p_S)}{n}} = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_S$$

$$\rightarrow \quad p = 0{,}965 \pm 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}965 \cdot 0{,}035}{1.000}} = 0{,}965 \pm 0{,}0096$$

$$Intervall: \quad p \in [0{,}9554\,;\,0{,}9746]$$

Die Behauptung des Herstellers kann mit einer Sicherheit von 90 % abgelehnt bzw. nicht bestätigt werden.

f) Der Ausschussanteil bei der Produktion der Glühlampen soll zum Konfidenzniveau 0,954 bei einer Abweichungstoleranz von d = 2,5% geschätzt werden.
Wie groß sollte der dafür notwendige Stichprobenumfang dann mindestens sein?

Lösung:

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{\ 2}}{4d^2} \xrightarrow{z_{\frac{\alpha}{2}} \leftrightarrow 0{,}977} n = \frac{2{,}01^2}{4 \cdot 0{,}025^2} = 1.616{,}04 \quad \rightarrow \quad n = 1.617$$

6	

Aufgabe 2:
Die stetige Zufallsvariable X sei **N(100 ; 10)-verteilt und es soll gelten P(X < A) = 0,7**
Bestimmen Sie den Wert für A.

Lösung:

$$P(X \le A) = 0{,}7 \quad \rightarrow \quad 0{,}53 = \frac{k - 100}{10} \quad \rightarrow \quad k = 105{,}3$$

Aufgabe 3: Mittagsschlaf:

18	

In einer Zufallsstichprobe von 675 Erwachsenen sagten bei einer Befragung 587 Probanden, dass sie nie Mittagsschlaf machen.

a) Berechnen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erwachsener nie Mittagsschlaf macht.

Lösung:

$$\rightarrow \quad p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1 - p_S)}{n}} = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_S$$

$$\rightarrow \quad p = 0{,}8696 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8696 \cdot 0{,}1304}{675}} = 0{,}8696 \pm 0{,}0254$$

$$Intervall: \quad p \in [0{,}8442\,;0{,}895]$$

Mit einer Sicherheit von 95 % machen zwischen 84,42 % und 89,5 % aller Erwachsenen keinen Mittagsschlaf.

b) Ermitteln Sie die Vertrauenswahrscheinlichkeit wenn das Konfidenzintervall eine Breite von d = +/- 2% haben soll.

Lösung:

$$\rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S \cdot (1 - p_S)}{n}} = 0{,}02$$

$$\rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{p_S \cdot (1 - p_S)}{n}}} \quad \rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}8696 \cdot 0{,}1304}{675}}} = 1{,}54306$$

$$\rightarrow \quad \Phi(1{,}54306) = 0{,}9382 \xrightarrow{1-0{,}9382} 0{,}0618 \xrightarrow{\cdot 2} 0{,}1236$$

$$\xrightarrow{1-0{,}1236} \quad Konfidenzniveau: 0{,}8764$$

c) Welche Mindestmenge hätte die Stichprobe haben müssen, wenn man ein 90 % Konfidenzintervall zugrunde legen und eine Abweichung von 0,5% zulassen wollte.

Lösung:

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{\;2}}{d^2} \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$\xrightarrow{z_{\frac{\alpha}{2}} \leftrightarrow 1{,}65} \quad n = \frac{1{,}65^2}{0{,}005^2} \cdot 0{,}8696 \cdot 0{,}1304 = 12.348{,}81 \quad \rightarrow \quad n = 12.349$$

Anlage:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Konfidenzintervall: $X = n\cdot p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \rightarrow (n\cdot p - X)^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}^{2} \cdot n\cdot p\cdot(1-p)$

Konfidenzintervall (Abschätzung): $\rightarrow \quad p = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_S\cdot(1-p_S)}{n}} = p_S \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_S$

Mindestumfang Stichprobe:

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}}{d^2} \cdot p\cdot(1-p) \xrightarrow[p\ unbekannt]{p(\max)=\frac{1}{2}} n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}}{4d^2}$$

$mit\ d = |h-p|$ bzw. zugelassener Abweichung