13. Jgst.	**6. Test**	**Datum: 15.02.2023**
Kurs M LK	**Fach: Mathematik (Leistungsfach)**	

Thema: e-Funktionen (Differential- & Integralrechnung)
Mit und ohne Scharparmeter

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: Tangente | 8 |

Gegeben sei die in R definierte Funktion $f_a(x)$ mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3 \quad mit\ a > 0$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f_a'(0) = -a$

Lösung:

$$f_a'(x) = -a \cdot e^{-x} \quad \rightarrow \quad f_a'(0) = -a \cdot e^{-0} = -a \cdot 1 = -a$$

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von $f_a(x)$ im Punkt $P(0 \mid f_a(0))$

b) Bestimmen Sie die Tangenten- und Normalengleichung.

Lösung:

$$f_a'(0) = -a = m_t \quad und \quad f_a(0) = a + 3$$

$$Normalensteigung\ mit\ Orthogonalitätsbedingung: \quad m_t \cdot m_n = -1$$

$$\rightarrow \quad -a \cdot m_n = -1 \quad \rightarrow \quad m_n = \frac{1}{a}$$

$$Tangente: \quad t(x) = -ax + a + 3 \qquad und \qquad Normale: \quad n(x) = \frac{1}{a}x + a + 3$$

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung (innermathematisch) | 32 |

Gegeben ist die in R definierte Funktion $f(x)$ mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen ohne das zugrundeliegende Koordinatensystem:

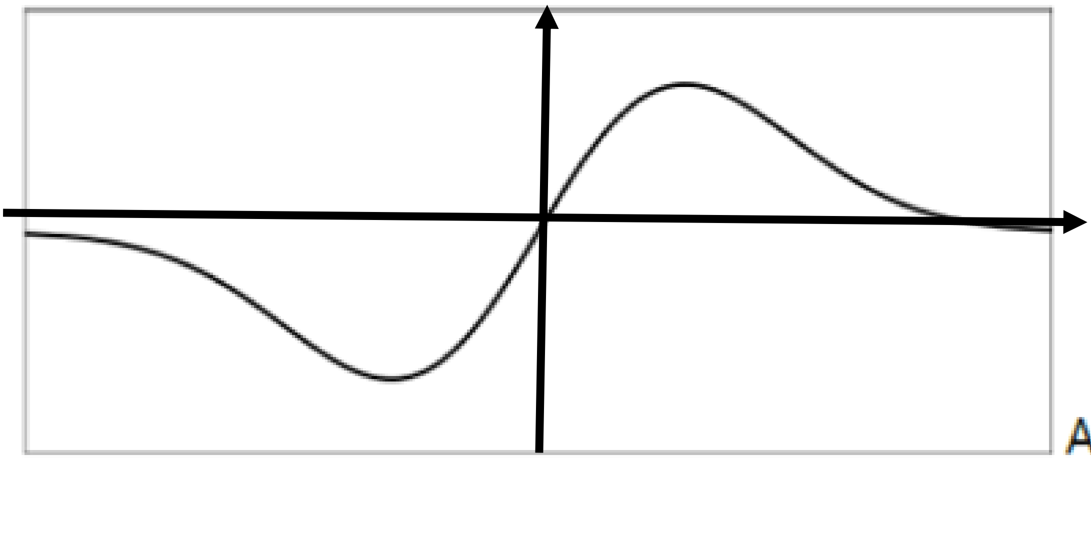


Abb. 1

a) Zeigen Sie, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und zeichnen Sie das Koordinatensystem so ein, dass die Punktsymmetrie erkennbar wird.

Lösung: Nachweis der Punktsymmetrie

$$f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = -f(x)$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$.

Lösung:

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = \frac{x \cdot e^{0,5}}{e^{0,5x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot e^{0,5}}{e^{0,5x^2}} \underset{L'Hospital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1 \cdot e^{0,5}}{0,5 \cdot e^{0,5x^2}} \to \frac{e^{0,5}}{\infty} \to 0$$

c) Ermitteln Sie die Extremwert**stellen** der Funktion (notwendige Bedingung genügt.)

Lösung:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\to |x| = 1 \to 2\ Lösungen$$

d) Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass eine Stammfunktion zur Funktion $f(x)$ folgende Form annehmen kann:

$$\int f(x)dx = \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} dx = c - e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$$

Lösung:

$$\int f(x)dx = \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} dx \to Substitution$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \to \frac{du}{dx} = -x \to -du = xdx$$

$$\to -\int e^u du = -e^u + c \to \int f(x)dx = c - e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = c - e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$$

e) Erklären Sie, dass die Fläche unter der Randfunktion von $f(x)$ für $x \to \infty$ den endlichen Flächenwert $A = \sqrt{e}$ besitzt.

Lösung:

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right]_0^k = \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}}\right] - \left(-e^{0,5}\right) = 0 + e^{0,5} = \sqrt{e}$$

f) Deuten Sie die Aussage: $F(c)-F(-c)=0 \quad mit\ c>0$

in Bezug auf den Graphen der Funktion $f(x)$ geometrisch.

Lösung: Aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung heben sich die Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gegenseitig auf und dies führt zum Integralwert 0.

Aufgabe 3: **Kurvenuntersuchung mit Scharparameter** **20**

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) \quad = \quad (1-kx^2)\cdot e^{-x} \quad mit\ k>0$

a) Geben Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k an.

Lösung: $f_k(x) \quad = \quad (1-kx^2)\cdot e^{-x}=0 \quad \rightarrow \quad |x|=\frac{1}{\sqrt{k}}$

b) Für einen bestimmten Wert von k besitzt der Graph der Funktion G_f zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die den Abstand 4 voneinander haben. Berechnen Sie diesen Wert.
Anmerkung: berücksichtigen Sie das Symmetrieverhalten.

Lösung: **Ansatzpunkt: Die Nullstellen liegen symmetrisch zueinander; die Funktion besitzt allerdings keine Symmetrieeigenschaft(en).**

$$f_k(x) \quad = \quad (1-kx^2)\cdot e^{-x}=0 \quad \rightarrow \quad |x|=\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$Ansatz\ 1: \quad \text{"Halber Abstand"}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k_1}}-\frac{1}{\sqrt{k_2}}=4 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k_1}}-2=0 \quad \rightarrow \quad k_1=\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad Nullstellen: \quad x=\pm 2$$

$$Ansatz\ 2: \quad \text{"Streckenlände und Symmetrielage der Nullstellen"}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k_1}}+\left|-\frac{1}{\sqrt{k_2}}\right|=4 \quad \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{k_1}}=\left|-\frac{1}{\sqrt{k_2}}\right|} \quad 2\cdot\frac{1}{\sqrt{k_1}}=4 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k_1}}=2 \quad \rightarrow \quad k_1=\frac{1}{4}$$

c) Begründen Sie, dass die Funktion f(x) in jedem Fall zwei Extremwertstellen besitzt.

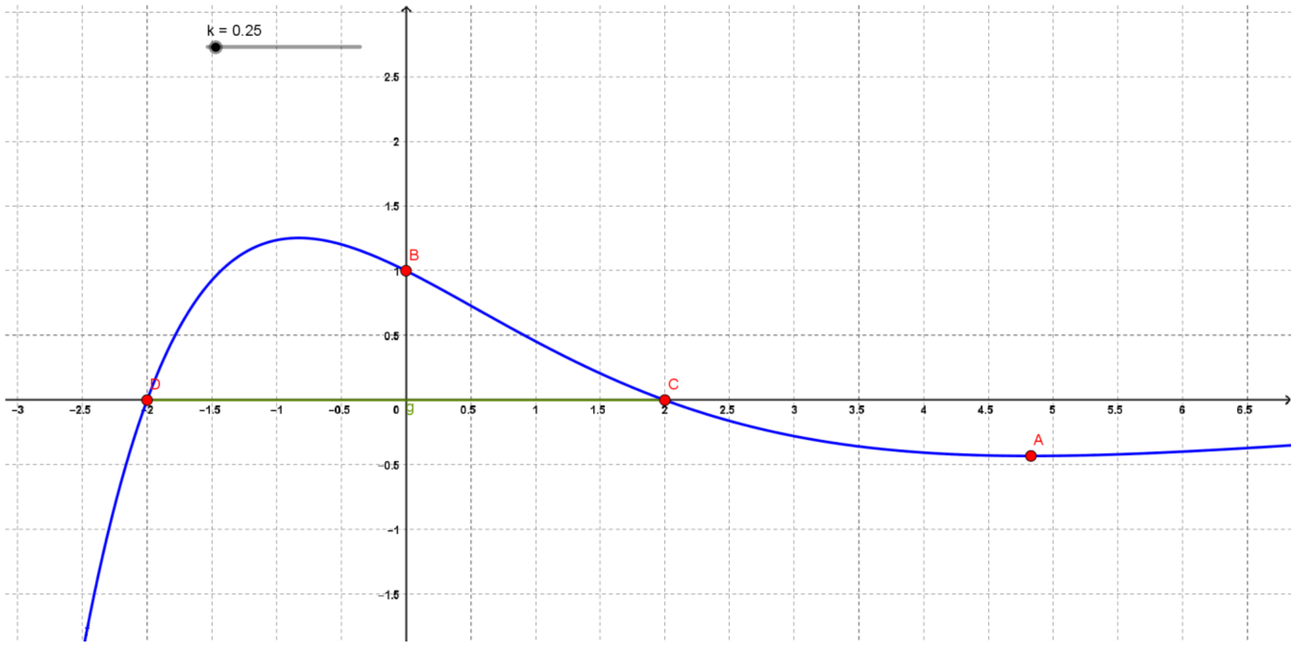
Lösung:

$$f_k(x) \quad = \quad (1-kx^2)\cdot e^{-x} \quad mit\ k>0$$

$$f_k'(x) \quad = \quad -2kx\cdot e^{-x}+(1-kx^2)\cdot e^{-x}\cdot(-1) \quad = \quad \left[-2kx-(1-kx^2)\right]\cdot e^{-x}$$

$$\rightarrow \quad -2kx-(1-kx^2)=0 \quad \rightarrow \quad kx^2-2kx-1=0$$

$$\rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2+4k}}{2k} \quad \rightarrow \quad D>0: \quad 4k^2+4k>0 \quad \rightarrow \quad 2\ Lösungen$$



d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f_k(x)$.

Lösung:

$$f_k(x) \quad = \quad (1-kx^2)\cdot e^{-x} \qquad mit\ k>0$$

VZ	D	I
$+$	$1-kx^2$	e^{-x}
$-$	$-2kx$	$-e^{-x}$
$+$	$-2k$	e^{-x}
$-$	0	$-e^{-x}$

$$\int f_k(x)dx = -e^{-x}(1-kx^2)+2kxe^{-x}+2ke^{-x}$$

$$\int f_k(x)dx = e^{-x}(-1+kx^2)+2kxe^{-x}+2ke^{-x}$$

$$\int f_k(x)dx = e^{-x}(kx^2+2kx+2k-1)$$

<u>Zusatzaufgabe:</u> 5

Wie lautet die Stammfunktion zu folgende Funktion: $g: x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$

Lösung per logarithmischer Integration:

$$g: x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1} \xrightarrow{g(x)=\frac{n'(x)}{n(x)}} G(x)=\ln\left|e^x+1\right|+c$$