# Integrale und Integralrechnung

**Mathematische Hintergründe:**

(1) Lehrbuch S. 161 – 205
(2) Integrieren: https://www.mathe-online.at/mathint/int/i.html
(3) Informationen zum Lesen und mit Beispielen
https://de.serlo.org/mathe/funktionen/stammfunktion,-integral-flächenberechnung

oder etwas umfangreicher mit den meisten Themen der Analysis (Schwerpunkt: Funktionen) in der Oberstufe: https://de.serlo.org/mathe/funktionen

## ***Und noch etwas besonders Hilfreiches:***

**Integrale online berechnen – mit Rechenweg und graphischer Veranschaulichung**
https://www.integralrechner.de/

**Ableitungen online berechnen – mit Rechenweg und graphischer Veranschaulichung**
https://www.ableitungsrechner.net/

## *Interessante Webseite zum sich Informieren und Weiterbilden:*

Mathematik: http://groolfs.de/
Informatik / Informationsverarbeitung: http://groolfs.de/informatik.html

**Integralrechnung Basic Grundlagen:**

a) Grundlagen: https://www.youtube.com/watch?v=fn6-CpyGn78
b) Anfang, Übersicht, Stammfunktionen: https://www.youtube.com/watch?v=wQTOV2zqHFE
c) Riemann-Integral, Herleitung etc.: https://www.youtube.com/watch?v=1O7KnjTB05U
d) Riemann-Integral: https://www.youtube.com/watch?v=WSRIr8hP3Mg

**Stammfunktionen bestimmen – angeleitete Übungen:**

a) Übung 1: https://www.youtube.com/watch?v=zF3PNnnexuM
b) Übung 2: https://www.youtube.com/watch?v=5Qz6RHRg2w8
c) Übung 3: https://www.youtube.com/watch?v=PMBnm__1Bd8
d) Darstellung von Ergebnissen: https://www.youtube.com/watch?v=3NhIlN7opF4
e) Warum „+ c"? https://www.youtube.com/watch?v=8kBKmO0yAmo

**Integralfunktion – Was ist das?**

- ⇨ https://www.youtube.com/watch?v=DyD2Ro7K2DQ
- ⇨ https://www.youtube.com/watch?v=CDzbrZRYJ_k

Eigenschaften:

- ⇨ Beispiel 1 (Ermittlung): https://www.youtube.com/watch?v=iVKI3cf48cE
- ⇨ Beispiel 2 (Extremstellen): https://www.youtube.com/watch?v=wGErJ2wvAAY
- ⇨ Beispiel 3 (genau eine Nullstelle): https://www.youtube.com/watch?v=Wgkm1ZTkLiQ
- ⇨ Beispiel 4 (streng monoton wachsend): https://www.youtube.com/watch?v=lMaLlKHWhqo
- ⇨ Beispiel 5 (Wertbestimmung): https://www.youtube.com/watch?v=nmo7L_a7TlQ
- ⇨ Beispiel 6 (Schnittpunkt mit Fkt.): https://www.youtube.com/watch?v=_08RN7yggUk

**Anwendungen der Integralrechnung:**

(1) Flächen unter der Randfunktion mit der x-Achse
  a) https://www.youtube.com/watch?v=ApQuEp8krp4
  b) https://www.youtube.com/watch?v=pq8BkFXUl8g
  c) Flächenbilanz: https://www.youtube.com/watch?v=lP1sALCSxQs

(2) Flächen zwischen zwei Graphen bzw. Kurven
  a) https://www.youtube.com/watch?v=_M-5Vhygffc
  b) https://www.youtube.com/watch?v=XONmXtVVcr4
  c) Beispiel 1: https://www.youtube.com/watch?v=7lkD7MOW4Cw
  d) Beispiel 2: https://www.youtube.com/watch?v=trjiyBb3qb4
  e) Beispiel 3: https://www.youtube.com/watch?v=2muJX2zfQ2U
  f) Beispiel 4: https://www.youtube.com/watch?v=-OJ0mvjz-FI
  g) Beispiel 5: https://www.youtube.com/watch?v=CHt0byjuhQQ
  h) Beispiel 6: https://www.youtube.com/watch?v=s-zqbBD0ZoA (Scharparameter)

(3) Fläche zwischen drei Graphen bzw. Kurven
  a) Beispiel 1 (Kurve, Kurve, y-Achse): https://www.youtube.com/watch?v=bJp0PRljz00
  b) Beispiel 2 (Kurve, Kurve, x-Achse): https://www.youtube.com/watch?v=YnetvEb0hCA
  c) Beispiel 3 (Kurve, Tangente, x-Achse): https://www.youtube.com/watch?v=IohrvrNzfmU
  d) Beispiel 4 (3 Kurven/Funktionen): https://www.youtube.com/watch?v=VfyT3cdfFmU
  e) Beispiel 5 (Kurve, Tangente, x-Achse): https://www.youtube.com/watch?v=JDAdZ6BEhyo
  f) Beispiel 6 (3 Kurven/Funktionen): https://www.youtube.com/watch?v=aXqp8f7T81I

(4) Rekonstruktion von Funktionen mit Integralrechnung (Steckbriefaufgaben)
  a) https://www.youtube.com/watch?v=IwiLE92WL5s

(5) Uneigentliche Integrale
  a) Grundlage: https://www.youtube.com/watch?v=H6u4SISwxKQ
  b) Bei Definitionslücke: https://www.youtube.com/watch?v=0ZlnkDBWKso
  c) Bei e-Funktion: https://www.youtube.com/watch?v=-AI0uRQCrqg
  d) https://www.youtube.com/watch?v=MxX5pAucuLY

(6) Rotationsvolumen (um x-Achse)
  a) Herleitung: https://www.youtube.com/watch?v=4xnwMuvHTqc
  b) Beispiel: https://www.youtube.com/watch?v=IOTNqGcHT1g
  c) Erklärung konkret: https://www.youtube.com/watch?v=7VPh_jkfv10
  d) Geogebra: https://www.youtube.com/watch?v=zF0S3PwGTdU

(7) Mittelwertsatz der Integralrechnung
  a) Erklärung und Beispiel: https://www.youtube.com/watch?v=MLVEFnfmRzc

(8) Kurvenlänge der Randfunktion - Bogenlänge

(9) Schwerpunktberechnung

**Zusammenfassende Übersicht über die Integrale**
**(bestimmt, unbestimmt, Integralfunktion, uneigentlich usw.)**

⇨ https://www.youtube.com/watch?v=2TM3eSDerMI

**Besondere Integrationsverfahren:**

(1) Partielle Integration – Produktintegration
   a) Einmalige Durchführung: https://www.youtube.com/watch?v=O23U8TWy_0s
   b) Ausführliche Erläuterung: https://www.youtube.com/watch?v=8SkIIzBP5FY
   c) Mehrmalige Durchführung: https://www.youtube.com/watch?v=OCZuMjW5Yx4
   d) Grundlagen: https://www.youtube.com/watch?v=t-V6tY5XHqM
   e) Fortgeschritten: https://www.youtube.com/watch?v=AWN01OjmgWI

(2) Integration durch Substitution
   a) Teil 1: https://www.youtube.com/watch?v=RBmd786shrQ
   b) Teil 2: https://www.youtube.com/watch?v=3tVvI5I49uU
   c) Teil 3: https://www.youtube.com/watch?v=FAO1aFB1fmg
   d) Grundlagen – Subst. 1. Art: https://www.youtube.com/watch?v=rKGlE4av4-c
   e) Fortgeschritten – Subst. 2. Art: https://www.youtube.com/watch?v=vtyaO162fa4

(3) Integration durch Partialbruchzerlegung
   a) Teil 1 - Übersicht: https://www.youtube.com/watch?v=Kd_757z-g-k
   b) Teil 2 – einfache Polstelle: https://www.youtube.com/watch?v=ljQQIYmw2aw
   c) Teil 3 – mehrfache Polstelle: https://www.youtube.com/watch?v=9ZT6W8n38Y0
   d) Teil 4 – komplexe Polstelle: https://www.youtube.com/watch?v=AxC602PvHq0
   e) Nenner hat keine Nullstellen: https://www.youtube.com/watch?v=xZ6OulwQEU0
   f) Grundlegende Darstellung: https://www.youtube.com/watch?v=AcIjNLPdOcQ

(4) Logarithmische Integration

(5) Numerische Integration
   a) Streifenmessung
   b) Rechteckverfahren
   c) Trapezverfahren
   d) Parabel-Verfahren
      (i) Keplersche Fassregel
      (ii) Simpson-Verfahren

(6) Monte-Carlo-Methode
   a) Mit Excel:
      (i) https://www.youtube.com/watch?v=8uBxLVvafx0
      (ii) https://www.youtube.com/watch?v=Ld7Dn4nMbno
      (iii) https://www.youtube.com/watch?v=YQNZVFK3qf4
      (iv) https://www.youtube.com/watch?v=iMhY8ydp3FE

   b) Mit Excel/VBA:
      (i) https://www.youtube.com/watch?v=wtEDZdiZZ6Y

(7) Integration durch Reihen (Potenzsummen; Partialsummen)

Grundlagen:

Taylor-Polynom
$$T_{x_0}(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k$$

Erläuterung:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. In den folgenden Formeln stehen $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ für die erste, zweite, ..., $k$-te Ableitung der Funktion $f$.

**Taylorpolynom** [ Bearbeiten | Quelltext bearbeiten ]

Das $n$-te *Taylorpolynom* an der Entwicklungsstelle $a \in I$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} T_n f(x;a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

**Integralrestglied** [ Bearbeiten | Quelltext bearbeiten ]

Das $n$-te *Integralrestglied* ist definiert durch:

$$R_n f(x;a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow$

**Satz (Taylorformel mit Integralrestglied)** [ Bearbeiten | Quelltext bearbeiten ]

Für alle $a$ und $x$ aus $I$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x;a) + R_n f(x;a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel

MacLaurin-Reihe
$$M(x_0 = 0) = T_{x_0=0}(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0) \cdot x^k$$

Erläuterung:

## Maclaurinsche Reihe

Die **maclaurinsche Reihe** (nach Colin Maclaurin) ist in der Analysis eine Bezeichnung für den Spezialfall einer Taylor-Reihe mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \ldots$$

Das Betrachten nur endlich vieler Glieder der obigen Reihe liefert die *maclaurinsche Formel* als Spezialfall der Taylor-Formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n$$

mit dem Restglied

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \qquad 0 < \theta < 1$$

oder alternativ

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Die Konvergenz der Maclaurinschen Reihe kann durch Untersuchung des Restgliedes $R_n$ oder durch Bestimmung des Konvergenzradius nachgewiesen werden. Im letzteren Falle kann es jedoch vorkommen, dass die Reihe zwar konvergiert, ihre Summe aber ungleich $f(x)$ ist. Ein Beispiel für solch einen Fall ist die Funktion $f(x) = \exp(-1/x^2)$ mit der Bedingung $f(0) = 0$: die Glieder ihrer Maclaurinschen Reihe sind alle 0, allerdings ist $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.[1]

Für Funktionen, die bei $x = 0$ nicht definiert sind – z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$, oder die bei $x = 0$ zwar definiert, aber nicht beliebig oft differenzierbar sind – z. B. $f(x) = x\sqrt{x}$, lässt sich ebenfalls *keine* maclaurinsche Reihe entwickeln.

Beispiele:

- Sinus

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

- Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$$

## Umwandlung beliebiger Taylorreihen in Maclaurin-Reihen [ Bearbeiten | Quelltext bearbeiten ]

Jede Taylorreihe, auch solche mit Entwicklungsstelle $x_0 \neq 0$, kann als Maclaurin-Reihe aufgefasst werden. Dazu wird statt der Taylorreihe zu $f(x)$ die Taylorreihe zu $f(x_0 + x)$ betrachtet (Substitution):

$$f(x_0 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} [(x_0 + x) - x_0]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n.$$

Durch die Verschiebung um $-x_0$ „zur Seite" ist die neue Entwicklungsstelle gerade 0, wodurch es sich bei der neuen Taylorreihe um eine Maclaurin-Reihe handelt.

Beispiel: Die Taylorreihe zur natürlichen Logarithmusfunktion $\ln(x)$ um die Entwicklungsstelle 1, nämlich

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n,$$

entspricht der Maclaurin-Reihe zu $\ln(x+1)$.

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Maclaurinsche_Reihe