Integrale und Integralrechnung

Orientierte Flächen mit dem Integral bestimmen

Aufgabe 1:

Flächen zwischen Funktion und x-Achse

Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den Senkrechten $x_1 = a$ und $x_2 = b$ sowie von der x-Achse und dem Graphen der Randfunktion f(x) begrenzt werden und veranschaulichen Sie das Ergebnis mit Geogebra

Nr	$f(x)$	a	b	Nr	$f(x)$	a	b
a)	x^2-1	**- 1**	**2**	**f)**	$\sin(t)$	$-\pi$	π
b)	$-x^2-4x-3$	**- 4**	**- 1**	**g)**	$-x^2+9$	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**
c)	x^3	**- 1**	**2**	**h)**	x^3-4x	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**
d)	x^3-x	**- 1**	**1**	**i)**	$-x^4+x^2$	**Zwischen allen drei Schnittstellen**	
e)	x^3+4x^2	**- 1**	**6**	**j)**	x^3-3x^2+2x	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**

Lösungen: **todo**

Nr	Randfunktion	Nullstellen	Stammfunktion	Intervalle	Flächen	Gesamtfläche
a)	x^2-1	+/- 1	$\frac{1}{3}x^3-x$	$[-1;1]$ $[1;2]$		
b)	$-x^2-4x-3$		$-\frac{1}{3}x^2-2x^2-3x$			
c)	x^3		$\frac{1}{4}x^4$			
d)	x^3-x		$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$			
e)	x^3+4x^2		$\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3$			
f)	$\sin(t)$		$-\cos(t)$			
g)	$-x^2+9$		$-\frac{1}{3}x^3+9x$			
h)	x^3-4x		$\frac{1}{4}x^4-2x^2$			
i)	$-x^4+x^2$		$-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3$			
j)	x^3-3x^2+2x		$\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2$			

Aufgabe 2: Flächen zwischen Funktionen

Bestimmen Sie den Gesamtinhalt A aller Flächen, die durch die Graphen der Funktionen f und g und durch die Senkrechten x_1 = a und x_2 = b begrenzt werden und veranschaulichen Sie das Ergebnis mit Geogebra

Nr	$f(x)$	$g(x)$	**a**	**b**
a)	$-x^2+2$	$-x^2+3$	**- 1**	**1**
b)	x^2	2	**- 1**	**1**
c)	$3x$	$-x+2$	**0**	**1**
d)	x^2	x	**0**	**2**
e)	x^2	x^3	**- 2**	**- 1**
f)	$\sin(t)$	$\cos(t)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
g)	x^2+2	6	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**
h)	x^2	$2-x^2$	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**
i)	x^3	x^2	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**
j)	$2x^2+3x-1$	$5x+3$	**Schnittstelle 1**	**Schnittstelle 2**
k)	x^3	x	**Zwischen allen drei Schnittstellen**	
l)	x^3-3x	$2x$	**Zwischen allen drei Schnittstellen**	
m)	x^3-3x	$2x^2$	**Zwischen allen drei Schnittstellen**	
n)	x^3-3x^2	$x-3$	**Zwischen allen drei Schnittstellen**	

Lösungen: todo

Nr	Differenz-funktion	Nullstellen Diff.-Fkt oder Schnittstellen der Fkt.	Stammfunktion der Differenzfunktion	Intervalle	Flächen	Gesamtfläche
a)	x^2-1	+/- 1	$\frac{1}{3}x^3-x$			
b)						

Uneigentliche Integrale

Aufgabe 1: Schreiben Sie die uneigentlichen Integrale als Grenzwert und berechnen Sie diesen

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \;=$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \;=$

c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=$

d) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=$

e) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx \;=$

f) $\int_1^{\infty} \frac{5+x}{x^2}\,dx \;=$

g) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \;=$

Lösungen:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; 1$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \;=\; 2$

c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; 1$

d) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2$

e) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx \;=\; 1$

f) $\int_1^{\infty} \frac{5+x}{x^2}\,dx \;\rightarrow\; \infty$

g) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \;=\; 1$

Lösungswege:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_1^{k} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^k \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right) \;=\; \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)}_{\to 0^-}+1 \;=\; 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_1^{k} \frac{1}{x^{1,5}}\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_1^{k} x^{-1,5}\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{0,5\cdot x^{0,5}}\right]_1^k$$

$$=\; \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{k^{0,5}}\right)-\left(-\frac{1}{0,5}\right) \;=\; \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{k^{0,5}}\right)}_{\to 0^-}+2 \;=\; 2$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{k\to-\infty}\int_k^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{k\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_k^{-1} \;=\; \left(-\frac{1}{-1}\right)-\lim_{k\to-\infty}\left(-\frac{1}{k}\right) \;=\; 1-\underbrace{\lim_{k\to-\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)}_{\to 0^+} \;=\; 1$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \lim_{k\to 0}\int_k^{1} \frac{1}{x^{0,5}}\,dx \;=\; \lim_{k\to 0}\int_k^{1} x^{-0,5}\,dx \;=\; \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{0,5}\cdot x^{0,5}\right]_k^1 \;=\; 2-\lim_{k\to 0}\left(2\cdot\sqrt{k}\right) \;=\; 2-0 \;=\; 2$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx \;=\; \lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{0} e^x dx \;=\; \lim_{k\to-\infty}\left[e^x\right]_k^0 \;=\; 1-\lim_{k\to-\infty} e^k \;=\; 1-\underbrace{\lim_{k\to-\infty} e^k}_{\to 0^+} \;=\; 1$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{5+x}{x^2}dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{1}^{k}\left(\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{5}{x}+\ln|x|\right]_1^k$$

$$=\; \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{5}{k}+\ln|k|\right)-\left(-\frac{5}{1}+\ln|1|\right) \;=\; \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{5}{k}\right)}_{\to 0^-}+\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(\ln|k|\right)}_{\to\infty}+5 \;\to\; \infty$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k} e^{-x}dx \;=\; \lim_{k\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^k \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(-e^{-k}\right)-\left(-1\right) \;=\; \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-e^{-k}\right)}_{\to 0^+}+1 \;=\; 1$$

oder

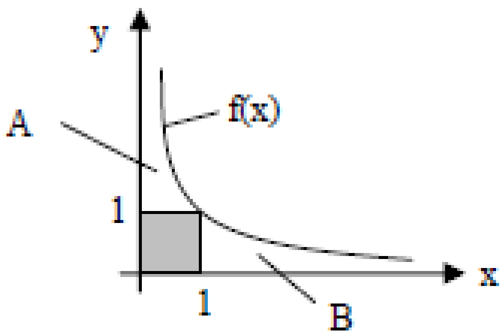
$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx \;=\; 1 \quad \text{wegen Achsensymmetrie zu} \quad \int_{-\infty}^{0} e^x dx$$

Aufgabe 2: Flächen in Abhängigkeit vom Exponenten

Geben Sie alle n > 0 an, für die die Flächen A bzw. B zwischen

der Hyperbel $f(x)=\frac{1}{x^n}$ $\quad mit\ n>0$ und den Koordinatenachsen

endlich sind und berechnen Sie ihren Inhalt in Abhängigkeit von n.



Dokumentieren bzw. veranschaulichen Sie das Grenzwert-verhalten in Abhängigkeit des Exponenten n mittels Schiebe-regler in Geogebra. Bestätigen Sie damit Ihr Ergebnis von oben.

Lösungen:

Fläche A:

$$\lim_{k\to 0}\int_k^1 f\left(x\right)dx \quad = \quad \lim_{k\to 0}\int_k^1 \frac{1}{x^n}dx \quad = \quad \lim_{k\to 0}\int_k^1 x^{-n}dx \quad = \quad \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\right]_k^1 \quad = \quad \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right]_k^1$$

Fallunterscheidung für n:

<u>**Fall 1: n > 1**</u>

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-n}-\lim_{k\to 0}\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{k^{n-1}} \quad \overset{ausklammern}{=} \quad \underset{Teiler<0}{\frac{1}{1-n}}\left(1-\underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{1}{k^{n-1}}}_{\to\infty}\right) \quad \to \quad "-t"\cdot\left(1-"\infty"\right) \quad \to \quad \infty$$

<u>**Fall 2: 0 < n < 1**</u>

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-n}-\lim_{k\to 0}\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{k^{n-1}} \quad \underset{0<n<1}{\overset{ausklammern}{=}} \quad \frac{1}{1-n}\left(1-\lim_{k\to 0}k^{1-n}\right) \quad = \quad \frac{1}{1-n}\left(1-\underbrace{\lim_{k\to 0}k^{1-n}}_{\to 0}\right) \quad \to \quad \frac{1}{1-n}$$

Ergebnis:

Für die Fläche A erhält man nur für mit $\lim\limits_{k\to 0}$ *und* $n\in\left]0\,;1\right[$ einen endlichen Flächengrenzwert von $A=\dfrac{1}{1-n}$

Fläche B:

$$\lim_{k\to \infty}\int_1^k f\left(x\right)dx \quad = \quad \lim_{k\to \infty}\int_1^k \frac{1}{x^n}dx \quad = \quad \lim_{k\to \infty}\int_1^k x^{-n}dx \quad = \quad \lim_{k\to \infty}\left[\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\right]_1^k \quad = \quad \lim_{k\to \infty}\left[\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^k$$

Fallunterscheidung für n:

<u>**Fall 1: n > 1**</u>

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{1-n} \quad \overset{ausklammern}{=} \quad \frac{1}{1-n}\left(\underbrace{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{n-1}}}_{\to 0}-1\right) \quad \to \quad \frac{1}{1-n}\cdot\left(-1\right) \quad \to \quad \frac{1}{n-1}$$

<u>**Fall 2: 0 < n < 1**</u>

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{1-n} \quad \underset{0<n<1}{\overset{ausklammern}{=}} \quad \frac{1}{1-n}\left(\underbrace{\lim_{k\to\infty}k^{1-n}}_{\to\infty}-1\right) \quad \to \quad \frac{1}{1-n}\cdot\left("\infty"-1\right) \quad \to \quad \infty$$

Ergebnis:

Für die Fläche B erhält man nur für mit $\lim\limits_{k\to\infty}$ *und* $n>1$ einen endlichen Flächengrenzwert von $B=\dfrac{1}{n-1}$

Übungen Buch – S. 183f

Aufgabe 1: $\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \qquad \int\limits_2^\infty e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \int\limits_0^1 \frac{2}{x^3}\,dx \qquad \int\limits_0^4 \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx$

Lösungswege:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_1^k \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k+1}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k+1}\right)}_{\to 0^-}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int\limits_2^\infty e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_2^k e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left[-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^k = \lim_{k\to\infty}\left(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)-\left(-\frac{2}{e}\right) = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{e^{\frac{1}{2}k}}\right)}_{\to 0^-}+\frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{2}{x^3}\,dx = \lim_{k\to 0}\int\limits_k^1 \frac{2}{x^3}\,dx = \lim_{k\to 0}\left[-\frac{1}{x^2}\right]_k^1 = (-1)-\lim_{k\to 0}\left(-\frac{1}{k^2}\right) = (-1)-\underbrace{\lim_{k\to 0}\left(-\frac{1}{k^2}\right)}_{\to -\infty} \;\to\; (-1)-("-\infty") \;\to\; \infty$$

$$\int\limits_0^4 \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{k\to 0}\int\limits_k^4 \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{k\to 0}\int\limits_k^4 4x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{k\to 0}\left[8\cdot\sqrt{x}\right]_k^4 = 16-\lim_{k\to 0}\left(8\cdot\sqrt{k}\right) = 16$$

Aufgabe 2: $\int\limits_0^\infty \frac{1000}{\sqrt{t+1}}\,dt$

Lösungswege:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1000}{\sqrt{t+1}}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int\limits_0^k \frac{1000}{\sqrt{t+1}}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int\limits_0^k 1000\cdot(t+1)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \lim_{k\to\infty}\left[2000\cdot(t+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^k$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[2000\cdot\sqrt{t+1}\right]_0^k = \lim_{k\to\infty}2000\cdot\sqrt{k+1}-2000 = \underbrace{2000\cdot\lim_{k\to\infty}\sqrt{k+1}}_{\to\infty}-2000 \;\to\; \infty$$

Aufgabe 3: $\int\limits_{-\infty}^0 2e^x dx$

Lösungswege:

$$\int\limits_{-\infty}^0 2e^x dx = \lim_{k\to-\infty}\int\limits_k^0 2e^x dx = \lim_{k\to-\infty}\left[2e^x\right]_k^0 = 2-\lim_{k\to-\infty}\left(2\cdot e^k\right) = 2-\underbrace{\lim_{k\to-\infty}\left(2\cdot e^k\right)}_{\to 0^+} = 2$$

Aufgabe 4: $\int\limits_{0{,}5}^\infty \frac{4}{x^3}\,dx$

Lösungswege:

$$\int\limits_{0{,}5}^\infty \frac{4}{x^3}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{0{,}5}^k \frac{4}{x^3}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{2}{x^2}\right]_{0{,}5}^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{k^2}\right)-(-8) = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{k^2}\right)}_{\to 0^-}+8 = 8$$

Aufgabe 5:

Ergebnisse anhand der Aufgabe: **Aufgabe 2: Flächen in Abhängigkeit vom Exponenten**

$$\lim_{k \to 0} \quad und \quad n \in \left]0\,;1\right[\quad \Rightarrow \quad \textit{Fläche} \quad A = \frac{1}{1-n}$$

$$\lim_{k \to \infty} \quad und \quad n > 1 \quad \Rightarrow \quad \textit{Fläche} \quad B = \frac{1}{n-1}$$

Funktion	Wert für n (Grad)	Fläche gemäß Vorgabe
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	**n = 3**	$B = \frac{1}{n-1} \rightarrow B = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	**n = 2**	$B = \frac{1}{n-1} \rightarrow B = \frac{1}{2-1} = 1$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	**n = 0,5**	$A = \frac{1}{1-n} \rightarrow A = \frac{1}{1-0{,}5} = 2$

Aufgabe 6:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{k \to \infty} \int_1^k e^{-x}dx$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}dx$$

Lösungswege:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{k \to \infty} \int_1^k e^{-x}dx = \lim_{k \to \infty} \left[-e^{-x}\right]_1^k = \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{e^x}\right]_1^k = \underbrace{\lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{e^k}\right]}_{\to 0^-} - \left(-\frac{1}{e}\right) \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$A(a) = -\frac{1}{e^a} + \frac{1}{e}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k \to \infty} \left[-x^{-1}\right]_1^k = \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = \underbrace{\lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{k}\right]}_{\to 0^-} - (-1) \rightarrow 1$$

$$A(a) = -\frac{1}{a} + 1$$