Integrale und Integralrechnung

Rotationsvolumina

Grundlegende Informationen:

⇨ **Rotationsvolumen (um x-Achse)** Lern-/Informationsvideos

a) Herleitung: https://www.youtube.com/watch?v=4xnwMuvHTqc
b) Beispiel: https://www.youtube.com/watch?v=IOTNqGcHT1g
c) Erklärung konkret: https://www.youtube.com/watch?v=7VPh_jkfv10
d) Geogebra: https://www.youtube.com/watch?v=zF0S3PwGTdU

⇨ **Formeln zur Rotation:**

Volumen von Drehkörpern:

Rotation des Schaubildes von $f(x)$ **...**

... um die x-Achse: $$V_a^b = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

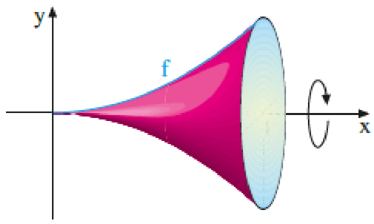
... um die y-Achse: $$V_c^d = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \left[f^{-1}(y) \right]^2 dy = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy \overset{f'(x)=\frac{dy}{dx}}{=} \pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x) dx$$

Bogenlänge: $$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx$$

Mantelfläche: $$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx$$

⇨ **Informationen aus dem Lehrbuch:** Rotationskörper S 195f

Rechenbeispiel 1: Der „Spitzhut“:



Der Körper entsteht durch die Rotation des Graphen der Funktion

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall [0 ; 1] um die x-Achse.

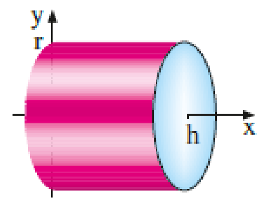
Die Volumenermittlung erfolgt gemäß folgender Formel:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \frac{1}{4}x^4 dx$$

$$V = \frac{1}{20}\pi \cdot \left[x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{20}\pi \cdot [1-0]_0^1 = \frac{1}{20}\pi$$

Rechenbeispiel 2: **Der Zylinder mit Radius r und Höhe h:**

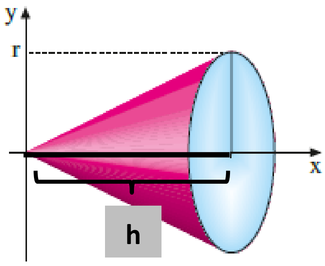


Der Zylinder entsteht durch die Rotation des Graphen der Funktion $f(x)=r$ im Intervall [0 ; h] um die x-Achse. Die Volumenermittlung erfolgt folgendermaßen:

$$V = \pi\cdot\int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx \rightarrow V=\pi\cdot\int_0^h\left[r\right]^2 dx = \pi\cdot\int_0^h r^2 dx$$

$$V = \pi\cdot\left[r^2x\right]_0^h = r^2\pi\cdot\left[h-0\right] = r^2\pi\cdot h$$

Rechenbeispiel 3: **Der Kegel mit Radius r und Höhe h:**



Der Kegel entsteht durch die Rotation des Graphen der Funktion $f(x)=mx=\frac{r}{h}\cdot x$ im Intervall [0 ; h] um die x-Achse.

f(x) ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung $m=\frac{r}{h}$ - die Steigung resultiert aus dem Steigungsdreieck: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{r}{h}$.

Die Volumenermittlung erfolgt folgendermaßen:

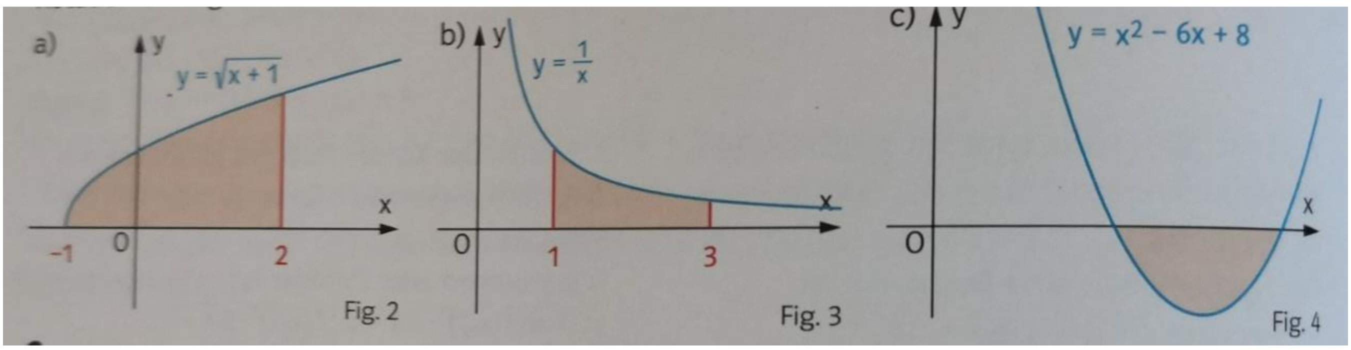
$$V = \pi\cdot\int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx \rightarrow V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}\cdot x\right]^2 dx = \pi\cdot\int_0^h\frac{r^2}{h^2}\cdot x^2 dx$$

$$V = \pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi\cdot\frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}\cdot\left[h^3-0\right] = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot h$$

Jetzt zum bitte selbst weitermachen:

Auftrag 1: **Übungen aus dem Buch S. 196 – A1, A2, A3, A4a-c, A6, A7, A8, A9**

A 1+2: Die gefärbte Fläche rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des durch die Rotation erzeugten Drehkörpers.



$$V = \pi\cdot\int_{-1}^2\left[\sqrt{x+1}\right]^2 dx = \pi\cdot\int_{-1}^2(x+1)dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^2$$

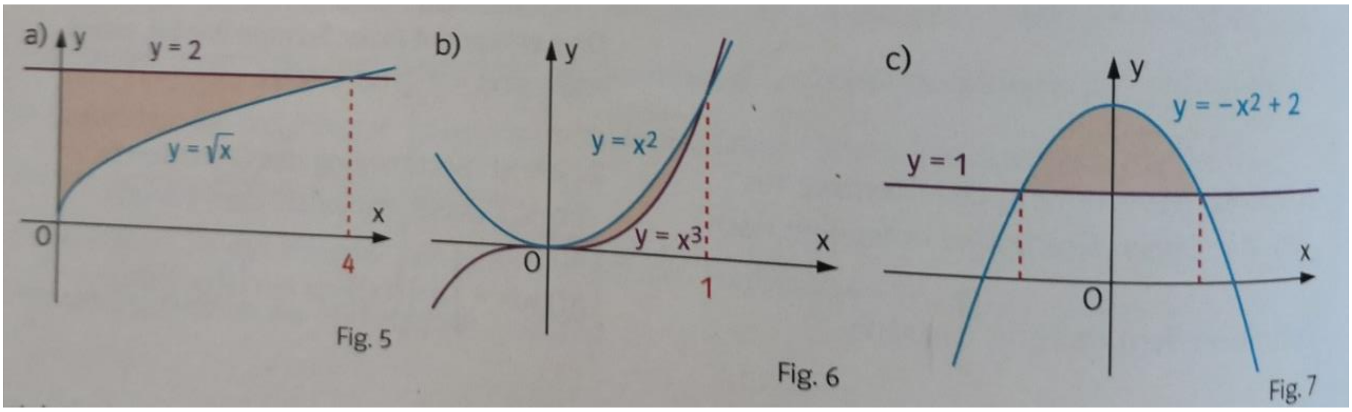
$$V = \pi\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\cdot4+2\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot1-1\right)\right] = \pi\cdot\left[4-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{9}{2}\pi$$

$$V = \pi\cdot\int_1^3\left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi\cdot\int_1^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = \pi\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \pi\cdot\left[-\frac{1}{3}-(-1)\right] = \frac{2}{3}\pi$$

$$Nullstellen:\quad x_1 = 2 \quad und \quad x_2 = 4$$

$$V = \pi\cdot\int_2^4\left[x^2-6x+8\right]^2 dx = \pi\cdot\int_2^4\left(x^4-12x^3+52x^2-96x+64\right)dx$$

$$V = \pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5-3x^4+\frac{52}{3}x^3-48x^2+64x\right]_2^4 = \frac{16}{15}\pi$$



$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \pi\cdot\int_0^4[2]^2 dx = \pi\cdot\int_0^4 4dx = \pi\cdot[4x]_0^4 = 16\pi \\ V_2 &= \pi\cdot\int_0^4\sqrt{x}^2 dx = \pi\cdot\int_0^4 xdx = \pi\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi \end{aligned}\right\} V_{Differenz} = 8\pi$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \pi\cdot\int_0^1\left[x^2\right]^2 dx = \pi\cdot\int_0^1 x^4dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}\pi \\ V_2 &= \pi\cdot\int_0^1\left[x^3\right]^2 dx = \pi\cdot\int_0^1 x^6dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}\pi \end{aligned}\right\} V_{Differenz} = \frac{2}{35}\pi$$

$$Schnittstellen:\quad -x^2+2=1 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; |x|=1$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &\overset{Achsensymmetrie}{=} 2\pi\cdot\int_0^1\left[-x^2+2\right]^2 dx = 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^4-4x^2+4\right)dx = 2\pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1 = \frac{96}{15}\pi \\ V_2 &\overset{Achsensymmetrie}{=} 2\pi\cdot\int_0^1[1]^2 dx = 2\pi\cdot\int_0^1 1dx = 2\pi\cdot[x]_0^1 = 2\pi \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow\; V_{Differenz} = \frac{22}{5}\pi = 4,4\pi$$

3 Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über [a; b] rotiert um die x-Achse (Fig. 1). Skizzieren Sie den Graphen von f und berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

a) $f(x) = 2e^{-0,4x}$; $a = 1$; $b = 3$ b) $f(x) = \sin(x)$; $a = 0$; $b = \pi$ c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $a = 2$; $b = 5$

$$V = \pi\cdot\int_1^3\left[2\cdot e^{-0,4x}\right]^2 dx = \pi\cdot\int_1^3\left(4\cdot e^{-0,8x}\right)dx = \pi\cdot\left[-5\cdot e^{-0,8x}\right]_1^3 = (-5)\cdot\pi\cdot\left[e^{-2,4}-e^{-0,8}\right] \approx 1{,}8\pi$$

$$V = \pi\cdot\int_0^\pi[\sin x]^2\,dx = \pi\cdot\int_0^\pi\left(\sin^2 x\right)dx \overset{\text{Partielle Integration}}{=} \frac{1}{2}\pi\cdot[x-\sin x\cdot\cos x]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2$$

NR: Partielle Integration

$$f = \sin x \qquad g = -\cos x$$
$$f' = \cos x \qquad g' = \sin x$$

$$Ansatz: \int\left(\sin^2 x\right)dx = -\sin x\cdot\cos x - \int\left[(-\cos x)\cdot\cos x\right]dx$$

$$\rightarrow \int\left(\sin^2 x\right)dx = -\sin x\cdot\cos x + \int\left(\cos^2 x\right)dx$$

$$\xrightarrow{1=\sin^2 x+\cos^2 x} \int\left(\sin^2 x\right)dx = -\sin x\cdot\cos x + \int\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$\xrightarrow{\text{Aufteilung Integral}} \int\left(\sin^2 x\right)dx = -\sin x\cdot\cos x + \int 1dx - \int\left(\sin^2 x\right)dx$$

$$\xrightarrow{+\int\left(\sin^2 x\right)dx} 2\int\left(\sin^2 x\right)dx = -\sin x\cdot\cos x + x$$

$$\xrightarrow{:2} 2\int\left(\sin^2 x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x$$

$$V = \pi\cdot\int_2^5\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]^2 dx = \pi\cdot\int_2^5\frac{1}{(x-1)^4}dx = \pi\cdot\left[\frac{-1}{3(x-1)^3}\right]_2^5 = \pi\cdot\left[\left(-\frac{1}{192}\right)+\frac{1}{3}\right] = \frac{21}{64}\pi$$

4 Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, die um die x-Achse rotiert (Fig. 2). Skizzieren Sie den Graphen von f und berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

a) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$ b) $f(x) = x^2(x+2)$ c) $f(x) = x\sqrt{4-x}$ d) $f(x) = (e^x - 1)\cdot(4-x)$

$$Nullstellen: \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 6$$

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 9x^2\right] dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 3x^3\right]_0^6 = 64{,}8\pi$$

$$Nullstellen: \quad x_1 = -2 \quad und \quad x_2 = 0$$

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^{0} \left[x^2(x+2)\right]^2 dx = \pi \cdot \int_{-2}^{0} \left[x^3 + 2x^2\right]^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^{0} \left[x^6 + 4x^5 + 4x^4\right] dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{5}x^5\right]_{-2}^{0} = \frac{128}{105}\pi$$

$$Nullstellen: \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4$$

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left[x \cdot \sqrt{4-x}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left[x^2(4-x)\right] dx = \pi \cdot \int_0^4 \left[4x^2 - x^3\right] dx = \pi \cdot \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi$$

$$Nullstellen: \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4$$

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left[(e^x - 1)\cdot(4-x)\right]^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left[(e^x - 1)^2 \cdot (4-x)^2\right] dx = 589{,}93\pi$$

5 Die Fläche zwischen den Graphen von f und g über [a; b] rotiert um die x-Achse (Fig. 3). Berechnen Sie den Rauminhalt des Drehkörpers.

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = 1$; $a = 3$; $b = 8$ b) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x^2 + 3$; $a = -1$; $b = 1$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \pi \cdot \int_3^8 \sqrt{x-1}^2 dx = \pi \cdot \int_3^8 (x-1)\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_3^8 = 32{,}5\pi \\ V_2 = \pi \cdot \int_3^8 [1]^2 dx = \pi \cdot \int_3^8 1\,dx = \pi \cdot [x]_3^8 = 5\pi \end{array}\right\} V_{Differenz} = 27{,}5\pi$$

$$\left.\begin{array}{lll} V_1 &=& 2\pi\cdot\int_0^1\left(-x^2+3\right)^2dx = 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^4-6x^2+9\right)dx = 2\pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+9x\right]_0^1 \;=\; 14{,}4\pi \\ V_2 &=& 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx = 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx = 2\pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1 \;=\; \frac{56}{15}\pi \end{array}\right\} \; V_{Differenz} = 10\frac{2}{3}\pi$$

$Option: Differenz\ der\ quadrierten\ Funktionen$

$$\left.\begin{array}{lll} V_1 &=& 2\pi\cdot\int_0^1\left(-x^2+3\right)^2dx \;=\; 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^4-6x^2+9\right)dx \\ V_2 &=& 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx \;=\; 2\pi\cdot\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx \end{array}\right\} \rightarrow V_{Differenz}$$

$$V_{Differenz} = 2\pi\cdot\int_0^1\left[\left(x^4-6x^2+9\right)-\left(x^4+2x^2+1\right)\right]dx \;=\; 16\pi\cdot\int_0^1\left(1-x^2\right)dx \;=\; 16\pi\cdot\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \;=\; 10\frac{2}{3}\pi$$

6 Beschreiben Sie einen Körper, dessen Volumen V man so berechnen kann:
$V = \pi\int_0^5 2^2\,dx - \pi\int_0^5 1{,}5^2\,dx.$

Achtung!
In Aufgabe 6 ist $V = \pi\int_0^5 (f(x))^2\,dx - \pi\int_0^5 (g(x))^2\,dx$
$= \pi\int_0^5 ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx,$
aber $V \neq \pi\int_0^5 (f(x) - g(x))^2\,dx.$
Begründen Sie dies anschaulich.

Der Körper, der in dieser Form berechnet werden kann, ist ein Hohlzylinder mit Innenradius von 1,5 LE und Außenradius 2 LE, so dass eine Streifenbreite von 0,5 LE um die x-Achse im Abstand des Innenradius rotiert.
Im Rechenbeispiel rechts rotiert ein Streifen von 0,5 LE direkt um die x-Achse ohne einen Abstand.
Das Problem liegt im Berechnungszeitpunkt der Differenzfunktion:
Differenzfunktion der quadrierten Randfunktion(en) ist nicht identisch mit dem Quadrat der Differenzfunktion der Randfunktionen

- ⇨ Korrekte Vorgehensweise: Randfunktionen quadrieren und dann die Differenzfunktion bilden

7 Durch Rotation des Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse entsteht der Hohlkörper eines liegenden Gefäßes. Dieses Gefäß wird aufgestellt und mit Wasser gefüllt.

Bis zu welcher Höhe steht die Flüssigkeit, wenn das Volumen des Wassers 30 VE beträgt?

$$V \;=\; \pi\cdot\int_0^h\left[\sqrt{x}\right]^2dx \;=\; \pi\cdot\int_0^h x\,dx \;=\; \pi\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^h \;=\; \frac{1}{2}h^2\pi$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}h^2\pi \;=\; 30 \;\rightarrow\; h^2 \;=\; \frac{60}{\pi} \;\rightarrow\; h \;=\; \sqrt{\frac{60}{\pi}}$$

8 Durch Rotation der Graphen von f mit $f(x) = 0{,}5x + 1$ und g mit $g(x) = 1{,}5\sqrt{x-1}$ über dem Intervall $[0; 4]$ um die x-Achse entsteht der Glaskörper einer kleinen Schale (LE 1cm, vgl. Fig. 4).

a) Wie viel Wasser passt in die Schale?

b) Welches Volumen hat das zur Herstellung benötigte Glas?

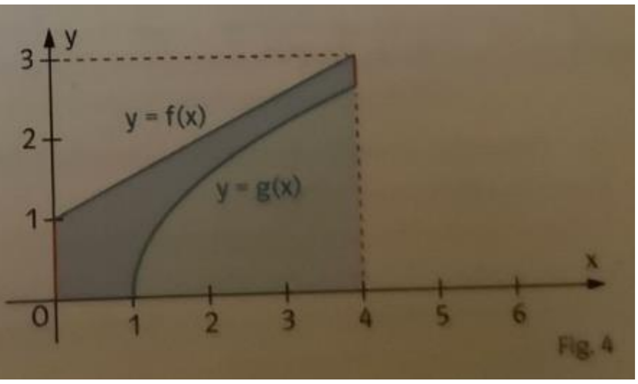


Fig. 4

$$V_g = \pi \cdot \int_1^4 \left(1{,}5 \cdot \sqrt{x-1}\right)^2 dx = 2{,}25\pi \cdot \int_1^4 (x-1)\,dx = 2{,}25\pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^4 = \frac{81}{8}\pi$$

$$V_f = \pi \cdot \int_0^4 (0{,}5x+1)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(0{,}25x^2 + x + 1\right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^4 = \frac{52}{3}\pi$$

$$\rightarrow \quad V_{Differenz} = \left(\frac{52}{3} - \frac{81}{8}\right)\pi = \frac{173}{24}\pi$$

9 Die Graphen der Funktionen f und g begrenzen eine Fläche, die um die x-Achse rotiert. Skizzieren Sie die Graphen von f und g und berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers (vgl. Fig. 5).

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$; $g(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = 3x^2 - x^3$; $g(x) = x^2$ c) $f(x) = 3x^2 - x^3$; $g(x) = 2x$

Vorgehensweise: *Differenzfunktion der quadrierten Funktionen*

Schnittstellen: $\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4$

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$

Vorgehensweise: *Differenzfunktion der quadrierten Funktionen*

Schnittstellen: $3x^2 - x^3 = x^2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 2$

$$V = \pi \cdot \int_0^2 \left(3x^2 - x^3\right)^2 - x^4 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(x^6 - 6x^5 + 9x^4\right) - x^4 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(x^6 - 6x^5 + 8x^4\right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 - x^6 + \frac{8}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{192}{35}\pi$$

$$\textit{Vorgehensweise}: \quad \textit{Differenzfunktion der quadrierten Funktionen}$$

$$\textit{Schnittstellen}: \quad 3x^2 - x^3 = 2x \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 1 \quad und \quad x_3 = 2$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot \int_0^1 4x^2 - \left(3x^2 - x^3\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 4x^2 - \left(x^6 - 6x^5 + 9x^4\right) dx = \frac{41}{105}\pi \\ V_2 &= \pi \cdot \left| \int_1^2 4x^2 - \left(3x^2 - x^3\right)^2 dx \right| = \pi \cdot \left| \int_1^2 4x^2 - \left(x^6 - 6x^5 + 9x^4\right) dx \right| = \frac{169}{105}\pi \end{aligned}\right\} \quad V_{gesamt} = 2\pi$$

10 Der Graph von f mit $f(x) = 2e^{0,1x}$ rotiert über dem Intervall $[0; 6]$ um die Gerade $y = 1$. Berechnen Sie den Rauminhalt des Rotationskörpers.

Zur Anwendung der Rotation um die x-Achse muss die Funktion f(x) um eine LE nach unten verschoben werden: g(x) = f(x) -1

Schritt 1: Kontrolle der Schnittstellen bzgl. der Rotationsintervalls

$$f(x) = 2e^{0,1x} \quad \rightarrow \quad 2e^{0,1x} = 1 \quad \xrightarrow[\ln]{:2} \quad x = -10\ln 2 < 0 \quad \Rightarrow x \notin [0;6]$$

Schritt 2: Berechnung des Rotationsvolumens

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left[2e^{0,1x} - 1\right]^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \left[4e^{0,2x} - 4e^{0,1x} + 1\right] dx = \pi \cdot \left[20e^{0,2x} - 40e^{0,1x} + x\right]_0^6 = 19,518\pi$$

Auftrag 2: Übungen aus dem Buch S. 196 – A11, A12 (freiwillig als Zusatz)

11 Die Fläche unter dem Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ über $[1; z]$ rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie z so, dass der dabei entstehende Drehkörper das Volumen $V = 0,9\pi$ hat.

$$V = \pi \cdot \int_1^k \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = \pi \cdot \left[-\frac{1}{k} + 1\right]$$

$$\rightarrow \quad \pi \cdot \left[-\frac{1}{k} + 1\right] = 0,9\pi \quad \xrightarrow[-1]{:\pi} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad k = 10$$

12 Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [a; b] rotiert um die x-Achse. Wie ändert sich das Volumen des entstehenden Rotationskörpers, wenn f durch $2 \cdot f$ bzw. durch $0{,}5 \cdot f$ ersetzt wird?

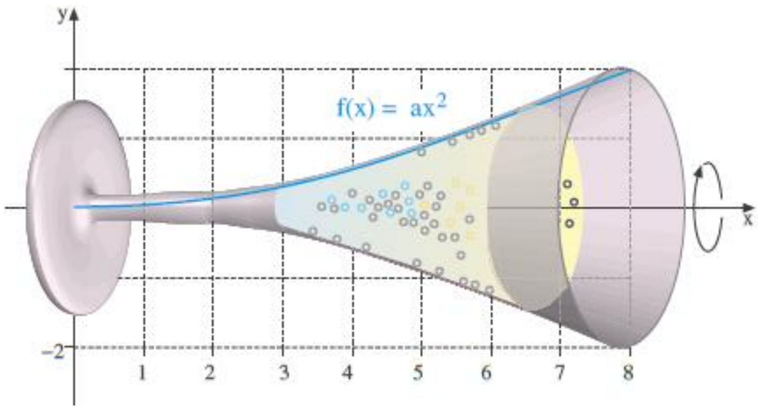
Zusatz zu A 12: Was vermuten Sie in Analogie zum zugehörigen Flächeninhalt?

$$V_1 = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \cdot \left[F^2(x)\right]_a^b = \pi \cdot \left[F^2(b) - F^2(a)\right]$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_a^b \left[k \cdot f(x)\right]^2 dx = \pi \cdot \int_a^b k^2 \cdot f^2(x)\,dx = k^2 \cdot \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx = k^2 \cdot \pi \cdot \left[F^2(x)\right]_a^b$$

$$V_2 = k^2 \cdot \pi \cdot \left[F^2(b) - F^2(a)\right] \rightarrow V_2 = k^2 \cdot V_1 \xrightarrow{\text{analog}} F_2 = k \cdot F_1$$

Auftrag 3: Welches Volumen hat das abgebildete Glas?



Lösung:

Bestimmung von Parameter a und Volumenermittlung:

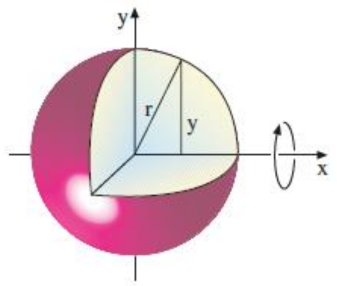
$$f(x) = ax^2 \rightarrow 2 = a \cdot 8^2 \rightarrow a = \frac{1}{32}$$

$$V_a = \pi \int_3^8 \left[ax^2\right]^2 dx = \pi \int_3^8 a^2 x^4 dx = \pi a^2 \int_3^8 x^4 dx$$

$$V = \frac{1}{5} \pi a^2 \left[x^5\right]_3^8 = \frac{1}{5} \cdot \left(8^5 - 3^5\right) \cdot \pi a^2$$

$$V_{\frac{1}{32}} = \frac{1}{5} \cdot \left(8^5 - 3^5\right) \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^2 = 6\frac{361}{1024} \cdot \pi \approx 19{,}96$$

Auftrag 4:



Leiten Sie das Volumen der Kugel mit dem Radius r her, wenn bekannt ist, dass die Kugel aus der Rotation eines Halbkreises entsteht und der Radius mittels Pythagoras dargestellt werden kann: $r^2 = x^2 + y^2$

Lösung:

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad [oberer\ Halbkreis]$$

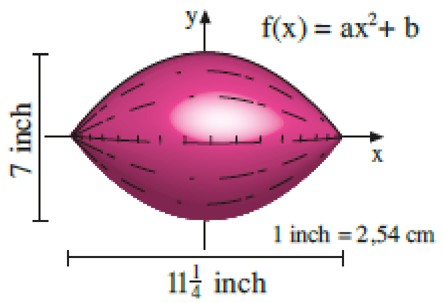
$$V_{Kugel} = \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r$$

$$V_{Kugel} = 2\pi \left[r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right] = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Auftrag 5:

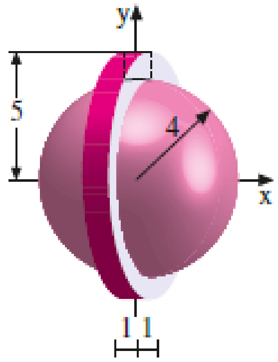
a) Der Football

Gesucht ist das Volumen des abgebildeten Footballs, der durch Rotation einer Parabel um die x-Achse entsteht. Bestimmen Sie zunächst die Gleichung der Randparabel f.



b) Der Schalenring

Eine Kugel mit dem Radius R = 4 wird durch eine ringartige Schale eingefasst, deren Volumen gesucht ist.



Lösung:

a) Der Football

$$f(x) = ax^2 + b$$

$$\rightarrow f(0) = 3{,}5\, inch = b \rightarrow 8{,}89[cm] = b$$

$$\rightarrow f(5{,}75) = 0 \rightarrow 5{,}75^2 a + 3{,}5 = 0 \rightarrow a = \frac{-3{,}5}{5{,}75^2} = -0{,}1058 \rightarrow a = -0{,}2689$$

$$f(x) = -0{,}27x^2 + 8{,}9$$

$$V = 2\pi \int_{0}^{14{,}6} \left[-0{,}27x^2 + 8{,}9\right]^2 dx = 2\pi \int_{0}^{14{,}6} \left[0{,}0729x^4 - 4{,}8x^2 + 79{,}21\right] dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{0{,}0729}{5} x^5 - 1{,}6x^3 + 79{,}21x \right]_0^{14{,}6} = 2\pi \cdot 5.849{,}17 \left[cm^3\right]$$

b) Der Schalenring

$f(x)=5 \quad und \quad g(x)=4$

$$\left.\begin{aligned} V_f &= 2\pi\int_0^1 5^2\,dx = 2\pi\int_0^1 25dx = 2\pi\cdot[25x]_0^1 = 50\pi \\ V_g &= 2\pi\int_0^1 4^2\,dx = 2\pi\int_0^1 16dx = 2\pi\cdot[16x]_0^1 = 32\pi \end{aligned}\right\} \rightarrow V_{Schalenring} = V_f - V_g = 18\pi$$

Warum NICHT Differenzfunktion der Randfunktionen???

$$V_{f-g} = 2\pi\int_0^1 1^2\,dx = 2\pi\int_0^1 1dx = 2\pi\cdot[1x]_0^1 = 2\pi$$

Wenn Differenzfunktion, dann erst nach dem Quadrieren der beiden Rand-Rotationsfunktionen:

$$V_{f^2-g^2} = 2\pi\left[\int_0^1 5^2\,dx - \int_0^1 4^2\,dx\right] = 2\pi\left[\int_0^1 5^2 - 4^2\,dx\right] = 2\pi\int_0^1 (25-16)\,dx = 2\pi\cdot[9x]_0^1 = 18\pi$$

Aufgabe 6:

Übungen, bei denen die Lösungen zur Kontrolle gleich mitgeliefert werden 😉

i)

Berechne das Volumen eines Hohlzylinders, dessen Höhe 7 cm, dessen äusserer Radius 5 cm und dessen innerer Durchmesser 4 cm beträgt.

Lösung: $V = 147\pi$

$f(x)=5 \quad und \quad g(x)=2 \rightarrow Innendurchmesser\ bedeutet\ Innenradius\ r_{innen}=2$

$$\left.\begin{aligned} V_f &= \pi\int_0^7 5^2\,dx = \pi\int_0^7 25dx = \pi\cdot[25x]_0^7 = 25\cdot 7\cdot\pi \\ V_g &= \pi\int_0^7 2^2\,dx = \pi\int_0^7 4dx = \pi\cdot[4x]_0^7 = 4\cdot 7\cdot\pi \end{aligned}\right\} \rightarrow V_{Hohlzylinder} = V_f - V_g = 21\cdot 7\cdot\pi = 147\pi$$

ii)

Wie gross muss a > 0 sein, damit der Inhalt der Fläche zwischen der x - Achse und der Kurve mit der Gleichung $y = -ax^3 + (a+1)x$, $x \geq 0$, minimal wird?

Lösung: a = 1

$$f_a(x) = -ax^3 + (a+1)x \rightarrow Nullstellen: \left[-ax^2 + (a+1)\right]x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad |x_2| = \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

$$F(a) = \int_0^{\sqrt{\frac{a+1}{a}}} \left[-ax^3 + (a+1)x\right]dx = \left[-\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}(a+1)x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{a+1}{a}}} = \left[x^2\left(-\frac{1}{4}ax^2 + \frac{1}{2}(a+1)\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{a+1}{a}}}$$

$$F(a) = \frac{a+1}{a}\left(-\frac{1}{4}a\cdot\frac{a+1}{a} + \frac{1}{2}(a+1)\right) = \frac{a+1}{a}\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\right) \overset{ausmult.}{=} \frac{1}{4}(a+1) + \frac{a+1}{4a}$$

$$F'(a) = \frac{1}{4} + \frac{4a - 4(a+1)}{16a^2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{16a^2} = 0 \xrightarrow[\cdot 4\cdot 16a^2]{+\frac{4}{16a^2}} 16a^2 = 16 \xrightarrow{a>0} a = 1$$

$$F''(a) = \frac{1}{2a^3} > 0 \rightarrow Min\ bei\ a = 1$$

iii)

y = (x^2 + t) / tx ($1 \le x \le 2$) rotiere um die x - Achse. Bestimme den Wert des Parameters t so, dass das Volumen des Rotationskörpers extremal wird. Ermittle auch die Art des Extremums.

Lösung: $t = -\frac{7}{3}\left[Minimum\right]$

$$V_t = \pi\int_1^2\left[\frac{x^2+t}{tx}\right]^2 dx = \pi\int_1^2\left[\frac{x^4+2tx^2+t^2}{t^2x^2}\right]dx = \pi\int_1^2\left[\frac{1}{t^2}x^2+\frac{2}{t}+\frac{1}{x^2}\right]dx$$

$$V_t = \pi\cdot\left[\frac{1}{3t^2}x^3+\frac{2}{t}x-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi\cdot\left[\left(\frac{8}{3t^2}+\frac{4}{t}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3t^2}+\frac{2}{t}-1\right)\right] = \pi\cdot\left(\frac{7}{3t^2}+\frac{2}{t}+\frac{1}{2}\right)$$

$$V_t\,' = \pi\cdot\left(-\frac{14}{3t^3}-\frac{2}{t^2}\right) = 0 \to -\frac{14}{3t^3} = \frac{2}{t^2} \to t = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

$$V_t\,'' = \pi\cdot\left(\frac{14}{t^4}+\frac{4}{t^3}\right) = \frac{1}{t^3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{14}{t}+4\right) \to V_t\,''\left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{3^3}{7^7}\cdot\pi\cdot(-2) > 0 \to Min$$

iv)

Der Graph der Funktion f(x) = (a^2 +3)x – ax^3 (a > 0) schliesst mit der positiven x-Achse ein endliches Flächenstück ein.

a) Für welchen Wert von a ist dieses Flächenstück extremal? Um welche Art von Extremum handelt es sich?

b) Rotiert man für diesen Wert von a das Flächenstück um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen.

Lösung: $a = 1\left[Minimum\right]$ *und* $V = 9{,}75\pi$

$$f_a(x) = -ax^3+\left(a^2+3\right)x \to Nullstellen: \left[-ax^2+\left(a^2+3\right)\right]x = 0 \to x_1 = 0 \quad und \quad |x_2| = \sqrt{\frac{a^2+3}{a}}$$

$$F(a) = \int_0^{\sqrt{\frac{a^2+3}{a}}}\left[-ax^3+\left(a^2+3\right)x\right]dx = \left[-\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{2}x^2\left(a^2+3\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{a^2+3}{a}}} = \left[x^2\left(-\frac{1}{4}ax^2+\frac{1}{2}\left(a^2+3\right)\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{a^2+3}{a}}}$$

$$F(a) = \frac{a^2+3}{a}\left(-\frac{1}{4}a\cdot\frac{a^2+3}{a}+\frac{1}{2}\left(a^2+3\right)\right) = \frac{a^2+3}{a}\left(-\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}\right) \overset{ausmult.}{=} \frac{a^2+3}{a}\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}\right)$$

$$F(a) \overset{ausmult.}{=} \frac{1}{4}\left(a^3+3a\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+3}{a}$$

$$F'(a) = \frac{3}{4}\left(a^2+1\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{2a^2-a^2-3}{a^2} = \frac{3}{4}\left[a^2+1+\frac{a^2-3}{a^2}\right] = 0 \to a^4+2a^2-3 = 0 \xrightarrow{a>0} a = 1$$

$$F''(a) = \frac{3}{4}\left[2a+\frac{6}{a^3}\right] \to F''(1) = \frac{3}{4}[2+6] > 0 \to Min\ bei\ a = 1$$

$$f_1(x) = -x^3+4x \to Nullstellen: \left[-ax^2+\left(a^2+3\right)\right]x = 0 \to x_1 = 0 \quad und \quad |x_2| = \sqrt{4} = 2$$

$$V = \pi\int_0^2\left[-x^3+4x\right]^2 dx = \pi\int_0^2\left[x^6-8x^4+16x^2\right]^2 dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{8}{5}x^5+\frac{16}{3}x^3\right]_0^2$$

$$V = \pi\cdot\left[\frac{128}{7}-\frac{256}{5}+\frac{128}{3}\right] = 9\frac{79}{105}\pi \approx 9{,}75\pi$$