

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Lineare Optimierung, Aufgabe A
Baden-Württemberg**

Das neue Lager eines Holzschnitzel-Heizwerks soll mit Holzschnitzeln der Holzsorten Nadelholz, Laubmischholz und Buche befüllt werden.

Die Holzsorten unterscheiden sich sowohl in ihrem Heizwert als auch in ihrem Preis. Der Heizwert beträgt pro Volumeneinheit für Nadelholz 4 Einheiten, für Laubmischholz 5 Einheiten und für Buchenholz 6 Einheiten.

Bei einem Händler kostet eine Volumeneinheit Nadelholz 1 Geldeinheit, Laubmischholz 1,5 Geldeinheiten und Buchenholz 2 Geldeinheiten.

Das Lager fasst nicht mehr als 2000 Volumeneinheiten und die Gesamtkosten für die Holzschnitzel dürfen 3200 Geldeinheiten nicht überschreiten.

Die Mischung der drei Holzsorten soll einen möglichst hohen Heizwert haben.

- a) Bestimmen Sie die optimale Mischung vom Nadelholz und Laubmischholz grafisch, wenn vom Buchenholz genau 850 Volumeneinheiten gekauft werden.

Wegen Sturmschäden wird Nadelholz billiger.

Erläutern Sie anhand Ihrer Zeichnung, wie sich die optimale Mischung und deren Heizwert verändern. (9 Punkte)

- b) Berechnen Sie mithilfe des Simplexverfahrens die optimale Mischung der drei Holzsorten, wenn vom Buchenholz höchstens 1000 Volumeneinheiten gekauft werden. Geben Sie den Heizwert dieser Mischung an. (6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe A
Baden-Württemberg

a) Bezeichnungen:

Man nimmt x Volumeneinheiten vom Nadelholz.

Man nimmt y Volumeneinheiten vom Laubmischholz.

Man nimmt z Volumeneinheiten vom Buchenholz.

Folgende Bedingungen gelten für die Variablen x , y und z :

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

$$\text{Max. Lagerbestand: } x + y + z \leq 2000 \quad (1)$$

$$\text{Gesamtkosten: } x + 1,5y + 2z \leq 3200 \quad (2)$$

$$\text{Zu maximieren ist die Heizwertfunktion } h = 4x + 5y + 6z \quad (3)$$

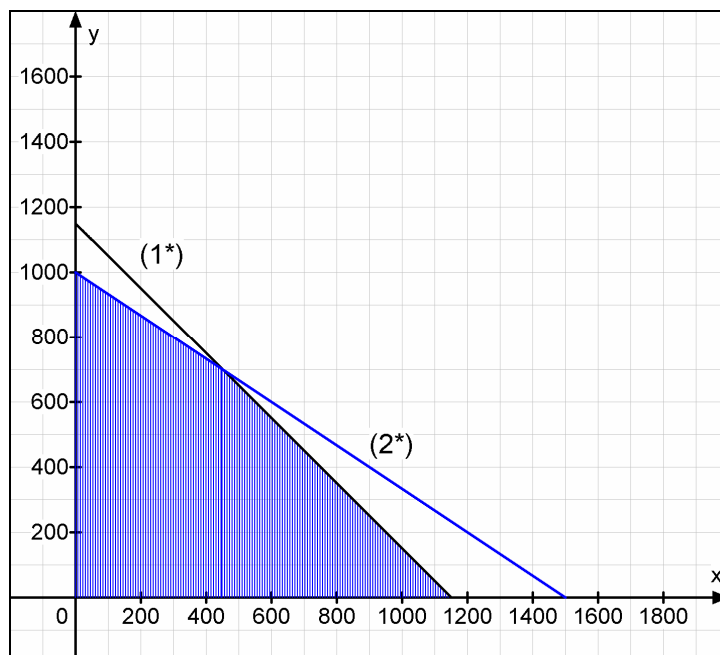
Es ist vorgegeben: $z = 850$

$$\text{Aus (1) folgt: } x + y + 850 \leq 2000 \Rightarrow y \leq -x + 1150 \quad (1^*)$$

$$\text{Aus (2) folgt: } x + 1,5y + 1700 \leq 3200 \Rightarrow y \leq -\frac{2}{3}x + 1000 \quad (2^*)$$

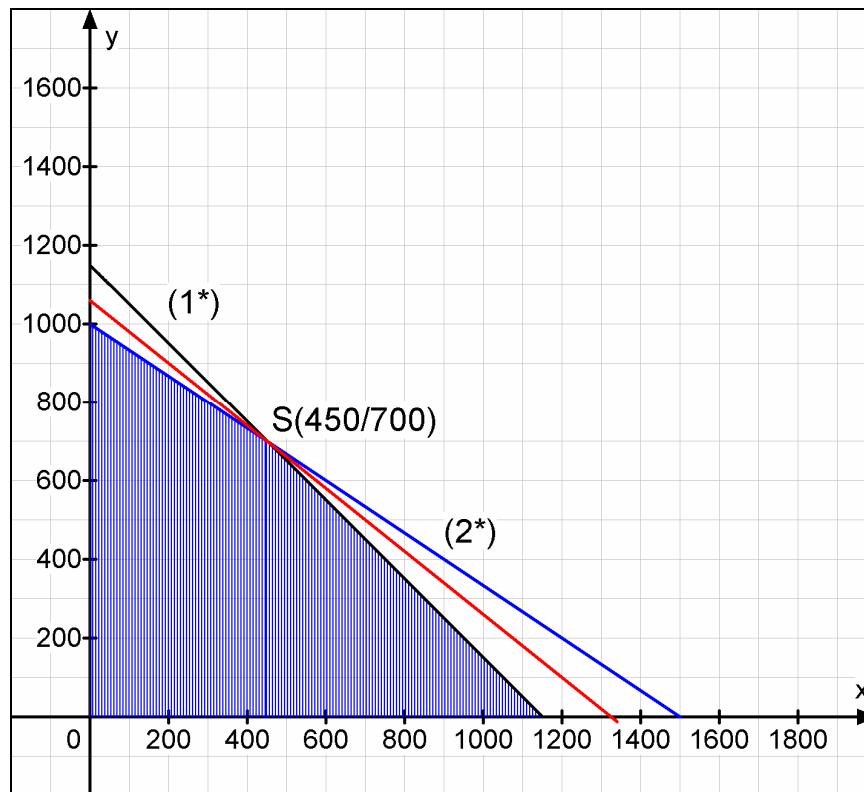
$$\text{Aus (3) folgt: } h = 4x + 5y + 5100 \Rightarrow y = \frac{h}{5} - \frac{4}{5}x - 1020 \quad (3^*)$$

Aus den Ungleichungen (1^*) und (2^*) ergibt sich die folgende eingefärbte Fläche:



Die Geraden (1^*) und (2^*) schneiden sich in $S(450/700)$.

Nun wird gemäß (3*) die Gerade $y = -\frac{4}{5}x + C = -\frac{4}{5}x + \frac{h}{5} - 1020$ so in das Koordinatensystem eingezeichnet, dass die Gerade noch einen gemeinsamen Punkt mit der markierten Fläche besitzt und der y-Achsenabschnitt C der Gerade einen möglichst großen Wert annimmt.



Die rote Gerade mit dem größten y-Achsenabschnitt geht durch den Punkt $S(450/700)$.

Damit ergibt sich eine optimale Mischung für $x = 450$ (Volumeneinheiten Nadelholz) und $y = 700$ (Volumeneinheiten Laubmischholz).

Der maximale Heizwert ergibt $h = 4 \cdot 450 + 5 \cdot 700 + 6 \cdot 850 = 10400$.

Wenn Nadelholz billiger wird – z.B. 0,5 Geldeinheiten je Volumeneinheit, ändert sich Ungleichung (2) zu $0,5x + 1,5y + 1700 \leq 3200 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 1000$

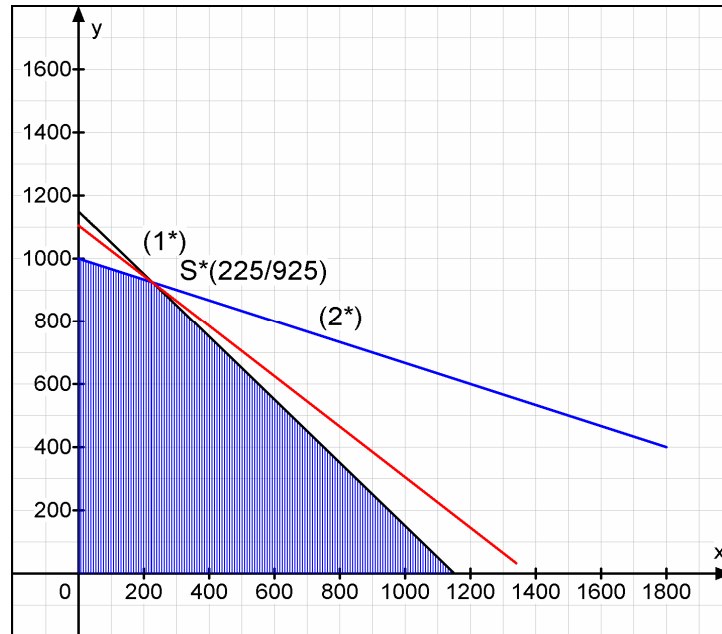
Die Gerade (2*) wird damit flacher.

Der Schnittpunkt von (1*) und (2*) lautet jetzt $S^*(225/925)$.

Damit ergibt sich eine optimale Mischung für $x = 225$ (Volumeneinheiten Nadelholz) und $y = 925$ (Volumeneinheiten Laubmischholz).

Der Anteil von Nadelholz geht somit zurück, der von Laubmischholz wächst.

Der neue Heizwert ergibt $h = 4 \cdot 225 + 5 \cdot 925 + 6 \cdot 850 = 10625$



- b) Für das Simplex-Verfahren müssen für die Ungleichungen (1) und (2) zwei Schlupfvariablen u und v eingeführt werden:

$$x + y + z + u = 2000$$

$$x + 1,5y + 2z + v = 3200$$

Da höchstens 1000 Volumeneinheiten Buchenholz verwendet werden dürfen, ergibt sich mit Hilfe einer weiteren Schlupfvariablen w

$$z + w = 1000$$

$$\text{Zielfunktion: } h = 4x + 5y + 6z$$

Aufbau des Simplex-Tableaus:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	1	1	1	0	0	2000	2000
1	1,5	2	0	1	0	3200	1600
0	0	1	0	0	1	1000	1000
4	5	6	0	0	0	h	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier z). Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 7 durch die Elemente der Pivotspalte ($2000:1$; $3200:2$; $1000:1$).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile. Dies ist in diesem Fall mit 1000 die 3. Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 1.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	1	0	1	0	-1	1000	1000
1	1,5	0	0	1	-2	1200	800
0	0	1	0	0	1	1000	-
4	5	0	0	0	-6	h-6000	

Nun ist die zweite Spalte (y) die Pivotspalte und die 2. Zeile die Pivotzeile.

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	0	0	3	-2	1	600	600
1	1,5	0	0	1	-2	1200	1200
0	0	1	0	0	1	1000	-
2	0	0	0	-10	2	3h-30000	

Nun ist die erste Spalte (x) die Pivotspalte und die 1. Zeile die Pivotzeile.

x	y	z	u	v	w	
1	0	0	3	-2	1	600
0	1,5	0	-3	3	-3	600
0	0	1	0	0	1	1000
0	0	0	-6	-6	0	3h-31200

Division der 2. Zeile durch 1,5 ergibt nun

x	y	z	u	v	w	
1	0	0	3	-2	1	600
0	1	0	-2	2	-2	400
0	0	1	0	0	1	1000
0	0	0	-6	-6	0	3h-31200

Die optimale Mischung besteht aus 600 Volumeneinheiten Nadelholz, 400 Volumeneinheiten Laubmischholz und 1000 Volumeneinheiten Buchenholz.

Der Heizwert beträgt $h = 4 \cdot 600 + 5 \cdot 400 + 6 \cdot 1000 = 10400$
 (oder: $3h - 31200 = 0 \Rightarrow h = 10400$)