

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)**  
**Hauptprüfung 2007 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 2**  
**Baden-Württemberg**

**2.1**

Die drei Abteilungen U, V und W eines Betriebes sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Gegeben ist die Input-Matrix

$$A_z = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,05 & 0,8 - z \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq z \leq 0,8$$

Die Lieferungen untereinander, die Marktabgabe sowie die Produktion werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

**2.1.1**

In der jetzigen Produktionsperiode gilt  $z = 0,25$ . Die Abteilungen U und W produzieren Waren gleichen Wertes. Die Abteilungen U und V liefern Waren im gleichen Wert an den Markt.

Abteilung W gibt Waren im Wert von 21 GE an den Markt ab. Berechnen Sie den Produktionsvektor und den Marktvektor. (5 Punkte)

**2.1.2**

Für welche Werte von  $z$  existiert die Leontief-Inverse  $(E - A_z)^{-1}$  ? (3 Punkte)

**2.1.3**

Berechne für die kommende Produktionsperiode den Marktvektor in Abhängigkeit von  $z$ , wenn die Abteilung U Waren im Wert von 120 GE, die Abteilung V Waren im Wert von 160 GE und die Abteilung W Waren im Wert von 100 GE produziert.

Erstellen Sie eine Input-Output-Tabelle für diese Produktionsperiode. Welche Werte kann  $z$  in dieser Produktionsperiode annehmen ? (6 Punkte)

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)**  
**Hauptprüfung 2007 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 2**  
**Baden-Württemberg**

### 2.1.1

Es gilt  $A_{0,25} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,05 & 0,55 \end{pmatrix}$  und  $E - A_{0,25} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,2 & -0,05 & 0,45 \end{pmatrix}$

Der Produktionsvektor lautet  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  und der Marktabgabevektor  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 21 \end{pmatrix}$ .

Aus der Formel  $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$  folgt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0,8x_1 - 0,6x_1 &= y_1 \\ 0,2x_2 - 0,2x_1 &= y_1 \\ -0,2x_1 - 0,05x_2 + 0,45x_1 &= 21 \end{aligned}$$

Das umgeformte und sortierte Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} 0,2x_1 - y_1 &= 0 \\ -0,2x_1 + 0,2x_2 - y_1 &= 0 \\ 0,25x_1 - 0,05x_2 &= 21 \end{aligned}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung  $x_1 = 140$  ,  $x_2 = 280$  ,  $y_1 = 28$  .

Ergebnis:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 280 \\ 140 \end{pmatrix}$  und  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \\ 21 \end{pmatrix}$

### 2.1.2

Um die Existenz der Inversen  $(E - A_z)^{-1}$  zu prüfen, muss die Matrix  $E - A_z$  auf Stufenform gebracht werden.

(Hinweis: Bei dieser Aufgabe muss nicht die Inverse selbst berechnet werden, sondern es sollen nur die z-Werte angegeben werden, für die die Inverse existiert.)

$$E - A_z = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,2 & -0,05 & 0,2+z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,2+4z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \\ 0 & 0 & 4z \end{pmatrix}$$

Die Inverse existiert immer dann, wenn bei der Betrachtung der Stufenform die Hauptdiagonalelemente nicht den Wert 0 annehmen.

Die Hauptdiagonalelemente lauten hier 0,8 sowie 0,2 und  $4z$ .

Für  $z = 0$  gilt  $4z = 0$ . Somit existiert für  $z = 0$  die Inverse nicht. Für alle anderen Werte von  $z$  existiert die Inverse.

### 2.1.3

Gegeben ist der Produktionsvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \\ 100 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{y} = (E - A_z) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,2 & -0,05 & 0,2 + z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 12 \\ -12 + 100z \end{pmatrix}$$

Input-Output-Tabelle:

	U	V	W	$\vec{y}$	$\vec{x}$
U	24	0	60	36	120
V	0	128	20	12	160
W	24	8	$80 - 100z$	$-12 + 100z$	100

Für  $z$  muss gelten:

$$80 - 100z \geq 0 \Rightarrow z \leq 0,8$$

$$-12 + 100z \geq 0 \Rightarrow z \geq 0,12$$

Laut Aufgabenstellung:  $0 \leq z \leq 0,8$

Insgesamt folgt aus den Bedingungen  $0,12 \leq z \leq 0,8$ .