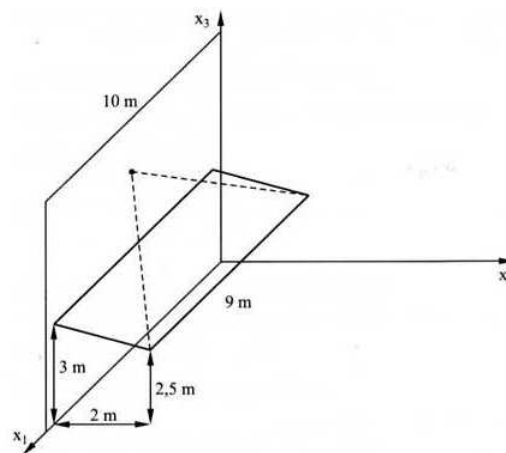


Berufliches Gymnasium (TG ohne CAS)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

An einer 10m breiten Hauswand ist mittig ein 9m breites rechteckiges Vordach in 3m Höhe angebracht. In der Mitte der Hauswand befindet sich ein 5m über dem Boden ein Haken, von dem aus zwei Drahtseile zu den äußeren Ecken des Vordaches gespannt sind. Weitere Maßangaben können der Abbildung entnommen werden. Die Hauswand befindet sich in der $x_1 - x_3$ -Ebene, der Erdboden in der $x_1 - x_2$ -Ebene des eingezeichneten Koordinatensystems.



2.1.1

Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der sich das Vordach befindet. Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Vordaches zum Erdboden. (4 Punkte)

2.1.2

Berechnen Sie die Länge der Drahtseile. Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Drahtseilen. (4 Punkte)

2.1.3

Das Vordach soll zusätzlich durch zwei Stangen mit der Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgestützt.

Werden. Diese werden an den äußeren Ecken des Vordaches angebracht.

2.1.3.1

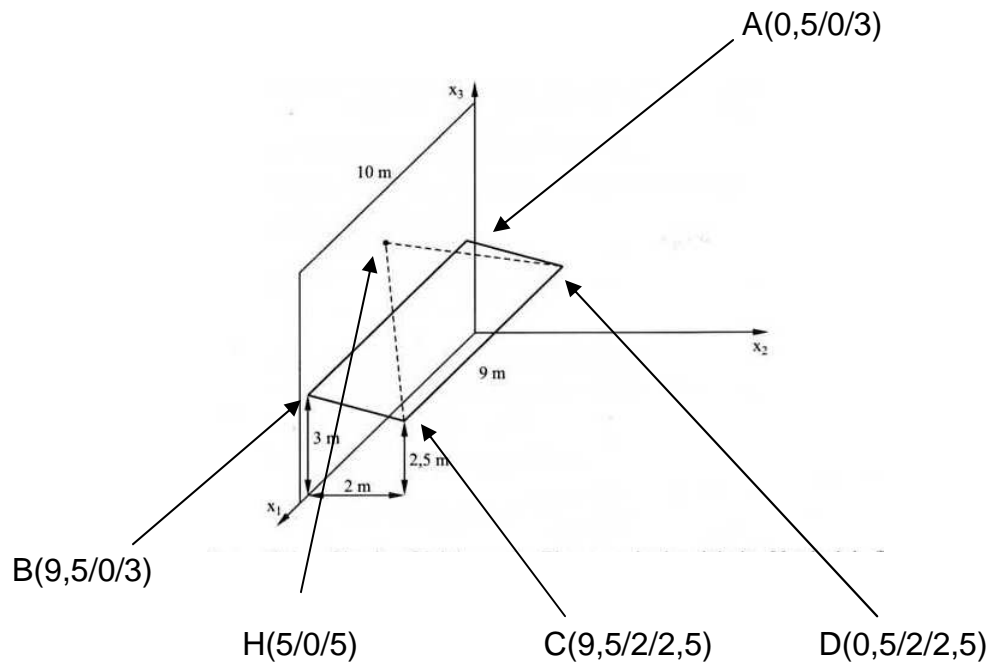
Untersuchen Sie, ob die Stangen rechtwinklig zum Vordach verlaufen. (2 Punkte)

2.1.3.2

Bestimmen Sie die Verankerungspunkte der Stangen auf dem Erdboden. Wie lang sind die Stangen? (5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (TG ohne CAS)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1



Die Ebenengleichung des Vordaches kann mit den Punkten A, B und C aufgestellt werden:

$$\vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder vereinfacht: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Der Neigungswinkel des Vordaches zum Erdboden entspricht dem Winkel, den die

$$\text{Vektoren } \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Vektor in entgegengesetzter Richtung von der x_2 -Achse)

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{4,25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{4,25}} \Rightarrow \alpha = 14,04^\circ$$

2.1.2

Der Haken hat die Koordinaten H(5/0/5).

Die Vektoren der Drahtseile lauten $\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{HD} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 2 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

Die Länge der Drahtseile beträgt $|\overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{HD}| = \sqrt{4,5^2 + 2^2 + 2,5^2} = \sqrt{30,5} = 5,52 \text{ m}$

Winkel zwischen den Drahtseilen:

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HD}}{|\overrightarrow{HC}| \cdot |\overrightarrow{HD}|} = \frac{-20,25 + 4 + 6,25}{\sqrt{30,5} \cdot \sqrt{30,5}} = \frac{-10}{30,5} \Rightarrow \beta = 109,1^\circ$$

2.1.3.1

Die Stangen verlaufen rechtwinklig zum Vordach, wenn der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der Vordachebene steht aus Aufgabe 2.1.1 steht.

$$\text{Kontrolle: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = 0$$

Da das Skalarprodukt der Vektoren jeweils 0 ergibt, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander.

2.1.3.2

Die erste Stange liegt auf einer Gerade, die durch den Punkt C geht und den

$$\text{Richtungsvektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ besitzt: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt der Gerade mit der $x_1 - x_2$ -Ebene ergibt den Verankerungspunkt V_1 .

Für die $x_1 - x_2$ -Ebene gilt $x_3 = 0$.

Daraus folgt die Gleichung $2,5 + 4r = 0 \Rightarrow r = -\frac{5}{8}$.

Einsetzen des Wertes von r in die Geradengleichung ergibt $V_1(9,5/1,375/0)$.

$$\text{Länge der Stange} = |\overrightarrow{V_1C}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0,625 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0,625^2 + 2,5^2} = 2,58 \text{ m}$$

Die zweite Stange liegt auf einer Gerade, die durch den Punkt D geht und den

Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ besitzt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt der Gerade mit der $x_1 - x_2$ -Ebene ergibt den Verankerungspunkt V_2 .

Für die $x_1 - x_2$ -Ebene gilt $x_3 = 0$.

Daraus folgt die Gleichung $2,5 + 4r = 0 \Rightarrow r = -\frac{5}{8}$.

Einsetzen des Wertes von r in die Geradengleichung ergibt $V_2(0,5/1,375/0)$.

Länge der Stange = $|\overrightarrow{V_2D}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0,625 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0,625^2 + 2,5^2} = 2,58 \text{ m}$