

Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

wirtschaftliche Anwendungen

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

1

Drei Weingärtner U, V und W eines Winzervereins bauen Trauben an.

U baut die Sorte R_1 an, V die Sorte R_2 und W baut die Sorte R_3 an.

Die Trauben werden zum Teil an den Winzerverein geliefert und zum Teil innerbetrieblich verarbeitet. Die Weingärtner U, V, W sind untereinander und mit dem Winzerverein nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Inputmatrix dieser Verflechtung lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 & 0,05 \\ 0,04 & 0,06 & 0,03 \\ 0,02 & 0,04 & 0,06 \end{pmatrix}$$

1.1

Weingärtner U erntet 8000 Mengeneinheiten (ME), Weingärtner V 9000 ME und Weingärtner W 6000 ME. Wie viele ME geben die Weingärtner davon an den Winzerverein ab ?

Erstellen Sie die hierzu gehörende Input-Output-Tabelle.

(5 Punkte)

1.2

Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahlen 0,06 in der Hauptdiagonalen der Inputmatrix A.

(2 Punkte)

1.3

Aus den Trauben werden im Winzerverein zunächst die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt.

Der Traubenbedarf in ME für je eine ME der Zwischenprodukte bzw. der Endprodukte ist den folgenden Tabellen zu entnehmen:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	4	1
R_2	3	3	4
R_3	4	4	6

	E_1	E_2	E_3
R_1	12	9	11
R_2	17	13	13
R_3	24	18	18

1.3.1

Berechnen Sie die Matrix für den mengenmäßigen Zusammenhang von Zwischenprodukten und Endprodukten.

(3 Punkte)

1.3.2

Vom Endprodukt E_1 werden 295 ME, vom Endprodukt E_2 35 ME und vom Endprodukt E_3 80 ME bestellt. Wie viele Mengeneinheiten der Traubensorten R_1, R_2 und R_3 müssen die

Weingärtner an den Winzerverein liefern ?

Wie groß ist ihre Gesamtproduktion für diese Bestellung ?

Lösungen

1.1

Wie viele ME geben die Weingärtner davon an den Winzerverein ab ?

Der Produktionsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Marktabgabevektor (= Konsumvektor) \vec{y} .

Die Leontief-Gleichung lautet $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$, wobei E die Einheitsmatrix darstellt.

Mit dem GTR ergibt sich: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 7040 \\ 7960 \\ 5120 \end{pmatrix}$.

Ergebnis: Der Weingärtner U gibt 7040 ME, V gibt 7960 ME und W gibt 5120 ME an den Winzerverein ab.

Erstellen Sie die hierzu gehörende Input-Output-Tabelle.

	U	V	W	Markt (Verein)	Produktion
U	$8000 \cdot 0,06 = 480$	$9000 \cdot 0,02 = 180$	$6000 \cdot 0,05 = 300$	7040	8000
V	$8000 \cdot 0,04 = 320$	$9000 \cdot 0,06 = 540$	$6000 \cdot 0,03 = 180$	7960	9000
W	$8000 \cdot 0,02 = 160$	$9000 \cdot 0,04 = 360$	$6000 \cdot 0,06 = 360$	5120	6000

1.2

Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahlen 0,06 in der Hauptdiagonalen der Inputmatrix A.

Die Zahlen 0,06 kommen in der Hauptdiagonale der Matrix A vor.

Der Wert 0,06 links oben gibt an, dass Weingärtner U einen Anteil von 0,06 (also 6%) seiner Produktion als Eigenverbrauch verwendet und damit diesen Anteil weder an den Winzerverein abgibt noch die anderen Weingärtner liefert.

Die anderen beiden Werte 0,06 in der Mitte und rechts unten geben analog an, dass Weingärtner V bzw. W einen Anteil von 0,06 (6%) ihrer Produktion ebenfalls als Eigenverbrauch verwenden.

1.3.1

Berechnen Sie die Matrix für den mengenmäßigen Zusammenhang von Zwischenprodukten und Endprodukten.

Anhand der beiden Tabellen können folgende Matrizen aufgestellt werden:

$$\text{Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rohstoff-Endprodukt-Matrix } C = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 11 \\ 17 & 13 & 13 \\ 24 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B.

Zwischen diesen drei Matrizen existiert folgender Zusammenhang: $A \cdot B = C$

Auflösung nach B: $B = A^{-1} \cdot C$

$$\text{Berechnung von B mit dem GTR: } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2

Wie viele Mengeneinheiten der Traubensorten R_1, R_2 und R_3 müssen die Weingärtner an den Winzerverein liefern ?

$$\text{Gegeben ist der Produktionsvektor } \vec{p} = \begin{pmatrix} 295 \\ 35 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Rohstoffvektor \vec{r} .

Es gilt die Gleichung $C \cdot \vec{p} = \vec{r}$

$$\text{Mit dem GTR folgt } \begin{pmatrix} 12 & 9 & 11 \\ 17 & 13 & 13 \\ 24 & 18 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 295 \\ 35 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4735 \\ 6510 \\ 9150 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Von R_1 müssen 4735 ME, von R_2 müssen 6510 ME und von R_3 müssen 9150 ME an den Verein geliefert werden.

Wie groß ist ihre Gesamtproduktion für diese Bestellung ?

Gegeben ist der Marktabgabevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4735 \\ 6510 \\ 9150 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Gesamtproduktion \vec{x} , die man aus der Leontief-Gleichung erhält:

$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$ (A ist die Inputmatrix aus der Aufgabenstellung !)

Mit dem GTR folgt: $\vec{x} \approx \begin{pmatrix} 5737,92 \\ 7494,43 \\ 10175,04 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

Insgesamt müssen die Weingärtner $5737,92 + 7494,43 + 10175,04 = 23407,4$ ME produzieren.