

Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Vektorgeometrie

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2016

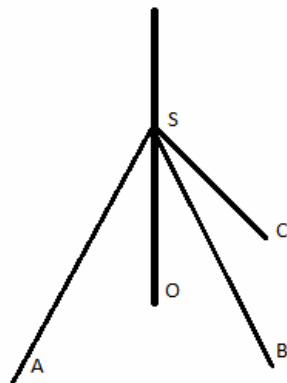
1

Ein Maibaum auf einem ebenen Dorfplatz soll mit drei Seilen in den Punkten A, B und C am Boden gesichert werden. Die Seile werden außerdem in einem Punkt $S(0|0|h)$ in der Höhe h über dem Dorfplatz an dem Baum befestigt.

Der Maibaum steht senkrecht zum Dorfplatz.

In einem passenden Koordinatensystem (1 Einheit= 1 Meter) steht der Maibaum im Ursprung O und es sind $A(1|2|0)$ und $B(-2|-1|0)$.

Skizze Maibaum:



1.1

S soll nun in 3 m Höhe liegen.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, die das Dreieck BSA enthält.

An dem Seil AS werden farbige Bändchen befestigt. Jeweils zwei benachbarte Bändchen sind an den Stellen angebracht, die einen Abstand von 30 cm haben.

Wie viele Bändchen können maximal angebracht werden ?

(5 Punkte)

1.2

In welcher Höhe h müssen die Seile AS und BS am Baum angebracht werden, damit sie in S einen rechten Winkel einschließen ?

(4 Punkte)

1.3

Zeigen Sie, dass jeder Punkt der Geraden m mit $\vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $k \in \mathbb{R}$ zu A und B den

gleichen Abstand hat.

Sei $h=3$. Bestimme die Koordinaten möglicher Punkte C am Boden, sodass C von A und B jeweils den Gleichen Abstand hat und alle drei Seile AS, BS und CS die gleiche Länge haben.

Für welchen dieser Punkte C liegt O im inneren des Dreiecks ABC?

(6 Punkte)

Lösungen

1.1

Es ist $S(0/0/3)$.

Ebenengleichung durch BSA: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Abstand der Punkte $A(1/2/0)$ und $S(0/0/3)$: $|\overrightarrow{SA}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \text{m} \approx 3,74 \text{ m}$

Es gilt: $\frac{3,74 \text{m}}{0,3 \text{m}} = 12,5$.

Falls im Punkt A auch ein Bändchen angebracht werden kann, können maximal 13 Bändchen angebracht werden.

1.2

Bedingung für einen rechten Winkel: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -h \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2 - 2 + h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = \pm 2$$

Es kommt nur $h = 2$ in Frage.

Die Seile müssen in einer Höhe von 2 m befestigt werden.

1.3

Ein allgemeiner Punkt auf der Geraden m ist $P(-k / k / 0)$.

Es gilt $|\overrightarrow{AP}| = \left| \begin{pmatrix} -k-1 \\ k-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-k-1)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{k^2 + 2k + 1 + k^2 - 4k + 4} = \sqrt{2k^2 - 2k + 5}$

Es gilt $|\overrightarrow{BP}| = \left| \begin{pmatrix} -k-2 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-k-2)^2 + (k+1)^2} = \sqrt{k^2 - 4k + 4 + k^2 + 2k + 1} = \sqrt{2k^2 - 2k + 5}$

Damit sind die Abstände zu den Punkten A und B jeweils gleich.

Der Punkt C liegt am Boden, daher hat er die Koordinaten $C(a/b/0)$.

Bedingung: $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

$$\begin{pmatrix} a-1 \\ b-2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 &= a^2 + 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 \\ \Rightarrow -6a - 6b &= 0 \Rightarrow b = -a \end{aligned}$$

Der Punkt C kann daher vereinfacht werden zu $C(a/-a/0)$.

Es gilt $|\overline{SA}| = \sqrt{14}$ gemäß Aufgabe 1.1

Es soll gelten: $|\overline{SC}| = \sqrt{14} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-0 \\ -a-0 \\ -3 \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + (-a)^2 + 9} = \sqrt{14}$

$$\Rightarrow 2a^2 + 9 = 14 \Rightarrow a^2 = 2,5 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2,5}$$

Es gibt zwei Punkte: $C_1(\sqrt{2,5} / -\sqrt{2,5} / 0)$ und $C_2(-\sqrt{2,5} / \sqrt{2,5} / 0)$.

Der Punkt C_1 liegt im Innern des Dreiecks ABC_1 .

Begründung anhand der Skizze:

Da die dritte Koordinate der Punkte jeweils 0 ist, können die Punkte im zweidimensionalen Koordinatensystem veranschaulicht werden.

