

**Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)**  
**Wahlteil – Aufgaben Analysis I 1**

Die Herstellungskosten eines neuen Rheumamittels werden durch eine Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+5} ; x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ modellhaft kalkuliert}$$

Hierbei gibt  $f(x)$  die Kosten in 10.000 Euro für die  $x$ -te Produktionseinheit an, wobei die Einheiten nacheinander produziert werden.

Die fünfte Produktionseinheit kostet in der Herstellung 950.000 Euro, die zwanzigste Produktionseinheit kostet nur noch 560.000 Euro.

- a) Bestimmen Sie  $a$  und  $b$ .  
 Skizzieren Sie das Schaubild von  $f$ .  
 Weisen Sie nach, dass die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit im Laufe der Zeit sinken.  
 Ab der wievielten Produktionseinheit sind die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit geringer als 400.000 Euro ?  
 Mit welchen Herstellungskosten für eine Produktionseinheit muss man langfristig rechnen ?

(Teilergebnis:  $f(x) = \frac{30x + 800}{x + 5}$  ). (7 VP)

- b) Ab der wievielten Produktionseinheit unterscheiden sich die Herstellungskosten von zwei aufeinander folgenden Produktionseinheiten um weniger als 10.000 Euro ?  
 Jede Produktionseinheit besteht aus 10.000 Packungen. Wie hoch muss der Verkaufspreis für eine Packung sein, damit die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihren Herstellungskosten entsprechen ? (5 VP)

**Hinweis: Der folgende Teil c) ist ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant.**

Bei klinischen Studien wird dieses Rheumamittel Patienten, die den Wirkstoff bisher nicht im Blut hatten, zugeführt und die Menge des Wirkstoffes im Blut gemessen.

- c) Ein Patient erhält alle 6 Stunden eine Spritze mit 50 mg Wirkstoff. Bis zur nächsten Spritze hat der Körper 18% des im Blut vorhandenen Wirkstoffs abgebaut.  
 Beschreiben Sie mittels einer rekursiv definierten Folge, wie viel Wirkstoff sich jeweils direkt nach Verabreichung einer Spritze im Blut befindet.  
 Welche Wirkstoffmenge befindet sich direkt nach der fünften Spritze im Blut ?  
 In welchem Bereich schwankt die Wirkstoffmenge im Blut langfristig ?  
 Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der im Blut vorhandenen Wirkstoffmenge für die ersten 24 Stunden.

(6 VP)

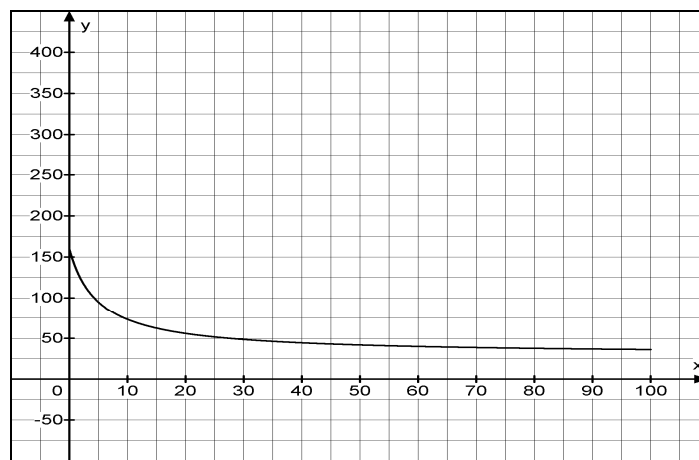
**Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)  
Lösungen Wahlteil – Analysis I 1**

a) Es gilt  $f(5) = 95 \Rightarrow \frac{5a+b}{10} = 95 \Rightarrow 5a+b = 950$

Es gilt  $f(20) = 56 \Rightarrow \frac{20a+b}{25} = 56 \Rightarrow 20a+b = 1400$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich  $a = 30$  und  $b = 800$ , also  $f(x) = \frac{30x+800}{x+5}$ .

Diese Funktionsgleichung stimmt mit dem angegebenen Teilergebnis überein.



Die sinkenden Herstellungskosten können mit der strengen Monotonie von  $f$  nachgewiesen werden.

Umschreiben der Funktion:  $f(x) = \frac{30x+800}{x+5} = (30x+800) \cdot (x+5)^{-1}$

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 30(x+5)^{-1} + (30x+800) \cdot (-1)(x+5)^{-2} = \frac{30}{x+5} - \frac{30x+800}{(x+5)^2} = \frac{-650}{(x+5)^2}$$

Da  $f'(x) = \frac{-650}{(x+5)^2} < 0$  ist, ergibt sich daraus, dass  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}_0^+$  streng monoton fallend ist.

Die Produktionseinheit, ab der die Herstellungskosten  $< 400.000$  Euro sind, ergeben sich aus der Bedingungsungleichung  $f(x) < 40$ .

Der Schnittpunkt von  $f(x)$  mit der waagrechten Geraden  $y = 40$  ergibt  $S(60/40)$ . Da für die 60. Produktionseinheit somit genau 400.000 Euro Herstellungskosten anfallen, sinken ab der 61. Produktionseinheit die Herstellungskosten unter 400.000 Euro.

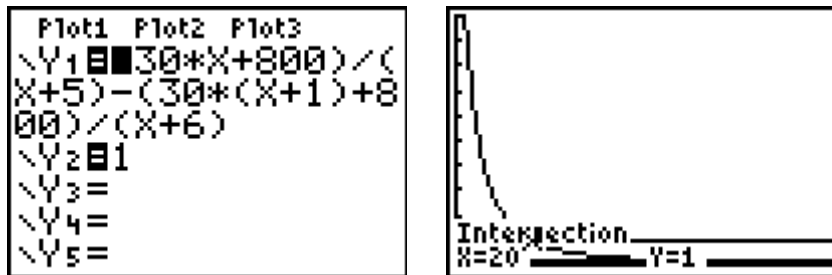
Langfristige Herstellungskosten ergeben sich aus  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 30$ .

$y = 30$  ist die waagrechte Asymptote und man muss langfristig mit 300.000 Euro Herstellungskosten für eine Produktionseinheit rechnen.

- b) Die beiden gesuchten Produktionseinheiten seien  $x$  und  $x+1$ .  
Aus der Bedingung ergibt sich  $f(x) - f(x+1) < 1$ .

$$f(x) - f(x+1) = \frac{30x + 800}{x + 5} - \frac{30(x+1) + 800}{x + 6} < 1$$

Lösung mit dem GTR:



Von der 20. auf die 21. Produktionseinheit fallen die Herstellungskosten genau um 10.000 Euro. Ab der 21. Einheit fallen zwei aufeinander folgende Produktionseinheiten somit um weniger als 10.000 Euro.

Es gilt  $\int_0^{100} f(x) dx = 4979$ .

Eine bessere Näherung lautet  $\int_{0,5}^{100,5} f(x) dx = 4920$

Somit betragen die Herstellungskosten der ersten 100 Produktionseinheiten insgesamt näherungsweise  $4920 \cdot 10.000 = 49.200.000$  Euro.

Die ersten 100 Produktionseinheiten umfassen 1.000.000 Packungen.

Somit muss der Verkaufspreis  $\frac{49.200.000}{1.000.000} = 49,20$  Euro pro Packung betragen.

- c) Die Folge  $a_n$  beschreibt die Menge des Wirkstoffes im Blut in mg direkt nach Verabreichung der  $n$ -ten Spritze im Blut:

$$a_n = 50 + 0,82 \cdot a_{n-1} \text{ und } a_0 = 0.$$

Erklärung: Unmittelbar nach der  $n$ -ten Spritze hat der Patient sowohl die 50 mg des gerade verabreichten Wirkstoffes im Blut als auch noch 82% der Wirkstoffmenge seit der letzten Spritze. Zu Beginn hat der Patient kein Wirkstoff im Blut.

$n$	$u(n)$
0	0
1	50
2	91
3	124.62
4	152.19
5	174.79
6	193.33

Direkt nach der 5. Spritze befinden sich laut GTR 174,79 mg im Blut.

Der Grenzwert der Folge ergibt sich aus dem Ansatz  $g = 50 + 0,82 \cdot g \Rightarrow g = 277,78$

Im Grenzwertfall entspricht die Zufuhr von 50 mg pro Spritze dem 18%-Verlust in den nächsten 6 Stunden.

Langfristig schwankt die Wirkstoffmenge somit zwischen 277,78 mg (Grenzwert der Folge entspricht Wirkstoffmenge im Blut unmittelbar nach Verabreichung der Spritze) und 227,78 mg (auf diesen Wert baut sich die Wirkstoffmenge in den darauf folgenden 6 Stunden ab).

Zeitlicher Verlauf der Wirkstoffmenge für die ersten 24 Stunden:



In den einzelnen 6-Stunden-Zeitintervallen wird der Wirkstoff nicht linear, sondern exponentiell abgebaut.

Man sollte den Wirkstoffabbau somit nicht als eine fallende Gerade darstellen, sondern als fallende e-Funktion. Durch den geringe Zerfallsgeschwindigkeit ähneln diese fallenden e-Funktionen jedoch fallenden Geraden.