

**Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)**  
**Wahlteil – Aufgaben Analysis I 3**

Die momentane Ankunftsrate an einem Kino – also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute – soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = 0,27 \cdot x^2 \cdot e^{-0,12x}.$$

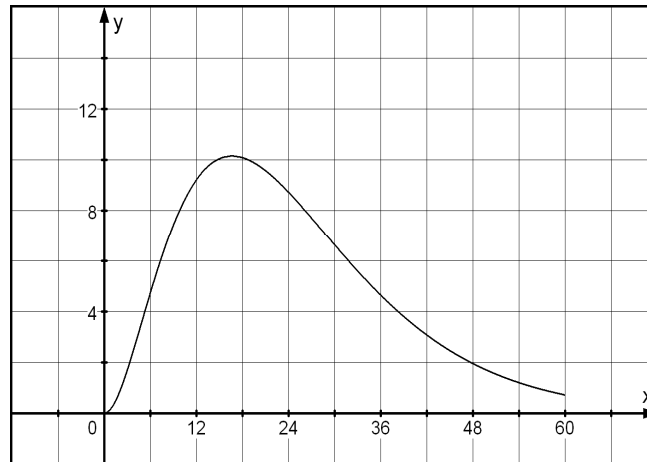
Dabei ist  $x$  die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und  $f(x)$  die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.

Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

- a) Skizzieren Sie das Schaubild von  $f$ .  
 Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?  
 Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino?  
(5 VP)
- b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion  $g$  mit  
 $g(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x}$  beschrieben wird.  
 Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?  
(4 VP)
- c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.  
 Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?  
 Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten?  
 Wie viele Besucher warten dann?  
 Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?  
(6 VP)
- d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr. Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Warteschlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?  
(3 VP)

**Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)  
Lösungen Wahlteil – Analysis I 3**

a) Skizze von f:

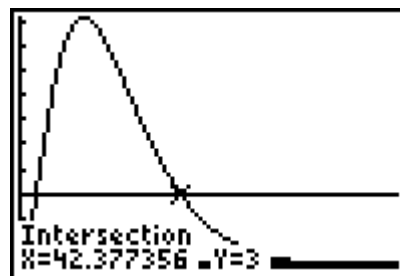


Mit dem GTR erhält man als Hochpunkt von f: HP(16,66/10,15).

Nach  $16\frac{2}{3}$  min, also um 19.16 Uhr und 40 Sekunden ist die höchste Ankunftsrate.

Dann kommen 10,15 Personen pro Minute zum Schalter.

Es kommen weniger als 3 Personen pro Minute, wenn gilt:  $f(x) < 3$



Dies ist der Fall für  $x > 42,38$  min. Ab 19.42 Uhr und 23 Sekunden kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino.

b) Da die Funktion f eine Ankunftsrate (Einheit: Personen pro Minute) darstellt, liefert die Stammfunktion  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  die Anzahl der insgesamt ankommenden Personen im Zeitintervall  $[0;x]$ .

Hierzu wird nun der Nachweis geführt, dass g(x) der Stammfunktion F(x) entspricht. Dazu wird der Nachweis  $g'(x) = f(x)$  geführt.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(4,5x + 37,5) \cdot e^{-0,12x} - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} \cdot (-0,12) \\ &= e^{-0,12x} (-4,5x - 37,5 + 0,27x^2 + 4,5x + 37,5) = 0,27x^2 \cdot e^{-0,12x} \end{aligned}$$

Damit ist g(x) eine Stammfunktion von f(x).

Für die Stammfunktion muss außerdem gelten  $F(0) = 0$ , da zu Beginn um 19.00 Uhr noch keine Besucher am Schalter sind.

Da  $g(0) = 312,5 - 312,5 \cdot e^0 = 0$  gilt, ist gezeigt, dass  $g(x)$  die Anzahl der ankommenden Personen seit 19.00 Uhr beschreibt.

GTR-Schaubild von  $g(x)$ :

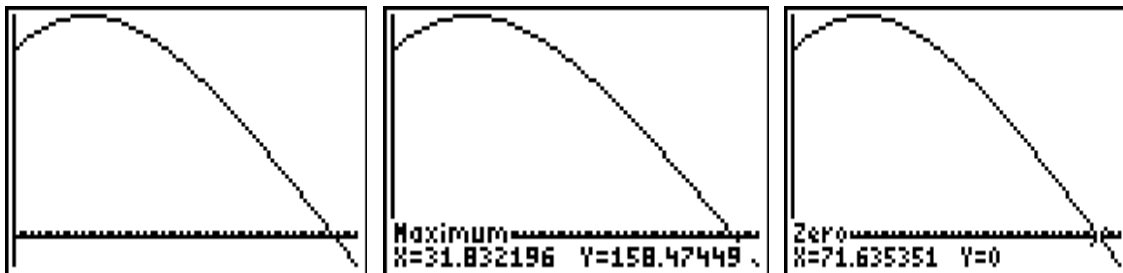


Nach diesem Modell kommen höchstens  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 312,5$  Personen ins Kino.

- c) Um 19.20 Uhr warten bereits  $g(20) \approx 134$  Personen am Kartenschalter.  
Eine Person, die um 19.20 Uhr kommt, muss mit  $134:6=22,3$  Minuten Wartezeit rechnen.

Die Variable  $x$  sei die Zeit ab 19.00 Uhr.

Die Anzahl der wartenden Personen zum Zeitpunkt  $x$  wird durch die Funktion  $w(x) = g(x) - 6 \cdot (x - 20)$  für  $x \geq 20$  dargestellt.



Die Anzahl der Wartenden ist nach 31,83 Minuten am größten, also um 19.31 Uhr und 50 Sekunden. Die Anzahl der Wartenden beträgt 158 Personen.

Nach 71,64 Minuten, also um 20.11 Uhr und 38 Sekunden hat sich die Warteschlange aufgelöst.

- d) Die Variable  $x$  sei die Zeit ab 19.00 Uhr  
Die Anzahl der wartenden Personen zum Zeitpunkt  $x$  wird durch die Funktion  $w(x) = g(x) - a \cdot (x - 50)$  für  $x \geq 50$  dargestellt, wobei  $a$  die unbekannte Anzahl der Personen ist, die pro Minute abgefertigt werden müssen.

Da um 20.30 Uhr die Schlange aufgelöst sein soll, muss gelten:

$$w(90) = 0 \Rightarrow g(90) - a \cdot 40 = 0 \Rightarrow 312,05 - 40a = 0 \Rightarrow a = 7,8 \text{ Personen.}$$

Ab 19.50 Uhr müssten pro Minute dann mindestens 7,8 Personen abgefertigt werden.