

Pflichtteilaufgaben zu Linearen Gleichungssystemen

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: keine
allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz
www.mathe-aufgaben.com

September 2016

Abituraufgaben (Haupttermin)**Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2011)**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} -5x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & -3x_2 & -x_3 & = & -11 \\ x_1 & & +x_3 & = & -1 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2007)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -21 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2005)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{array}$$

Wie lässt sich ein solches Gleichungssystem und seine eindeutige Lösung geometrisch deuten ?

Lösungen

Aufgabe 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ | \cdot 5 \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot 2 \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die letzten Zeile ist eine Nullzeile, das heißt, es verbleiben nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen.

Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aus der 2. Zeile folgt: $-2x_2 - 4t = -4 \Rightarrow x_2 = -2t + 2$

Aus der 1. Zeile folgt: $-5x_1 + (-2t + 2) - 3t = 7 \Rightarrow -5x_1 = 5t + 5 \Rightarrow x_1 = -t - 1$

Die drei Gleichungen beschreiben drei Ebenen im dreidimensionalen Raum.

Die unendlich vielen Lösungen beschreiben eine Schnittgerade, in der sich alle drei Ebenen schneiden.

Aufgabe 2:

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -21 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot (-3) \leftarrow \\ | \cdot (-3) \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -7x_2 - 7x_3 = -35 \\ 14x_2 + 14x_3 = 70 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot 2 \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -7x_2 - 7x_3 = -35 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Die dritte Zeile kann gestrichen werden, da sie zwar eine wahre Aussage $0 = 0$ liefert, aber keine Information über eine Variable enthalten ist.

Somit liegen nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen vor. Es ergeben sich unendlich viele Lösungen.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Daraus folgt aus der 2. Zeile: $-7x_2 - 7t = -35 \Rightarrow x_2 = 5 - t$

Aus der 1. Zeile: $3x_1 - (5 - t) + 2t = 7 \Rightarrow 3x_1 = 12 - 3t \Rightarrow x_1 = 4 - t$

$$\text{Lösungsvektor: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4-t \\ 5-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: Die drei Gleichungen können als Koordinatengleichungen dreier Ebenen im Raum interpretiert werden. Die Lösung des LGS bedeutet anschaulich, dass sich diese drei Ebenen in einer Schnittgerade schneiden. Die Schnittgerade besitzt die

$$\text{Parameterform g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 & | \cdot (-1) & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 & \leftarrow & \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 & \leftarrow & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 & & \\ -2x_2 & = & -2 \\ -3x_2 - 2x_3 = -7 & & \end{array}$$

Aus der 2. Zeile erhält man $x_2 = 1$. Aus der 3. Zeile ergibt sich dann $x_3 = 2$ und das ganze in die 1. Zeile eingesetzt ergibt $x_1 = 4$, also $L = \{ (4/1/2) \}$

Geometrische Interpretation: Die drei Gleichungen können als Koordinatengleichungen dreier Ebenen im Raum interpretiert werden. Die Lösung des LGS bedeutet anschaulich, dass sich diese drei Ebenen im Punkt $P(4/1/2)$ schneiden.