Gebrochen-rationale Funktionen

Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

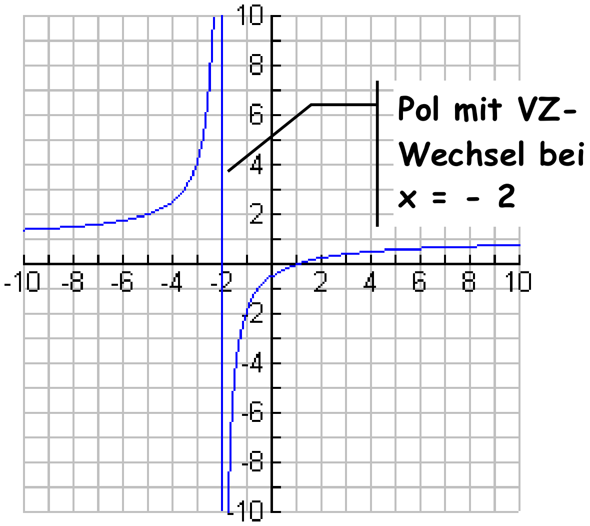
Unstetigkeitsstellen (= Ermittlung über Nennernullstelle)

Defintion: Die Unstetigkeitsstelle $x_0 \in \Re$ heißt

POLSTELLE (POL; UNENDLICHKEITSSTELLE)

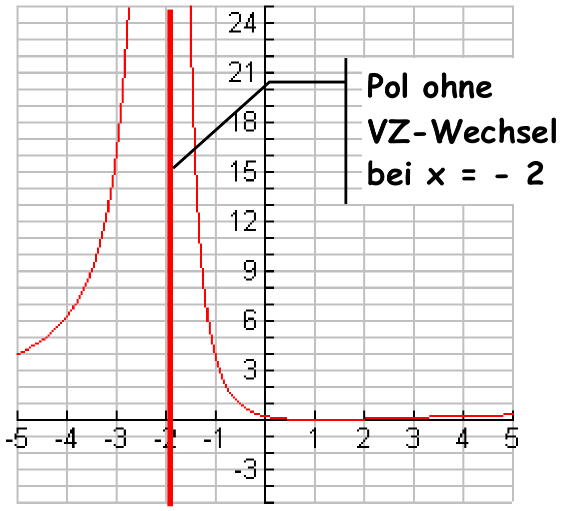
wenn gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Beispiele:



$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}; \quad D = \Re \setminus \{-2\}$$

Pol mit Vorzeichenwechsel bei x = -2



$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}; \quad D = \Re \setminus \{-2\}$$

Pol ohne Vorzeichenwechsel bei x = -2

Anmerkung: **Ist x_0 nur eine Nennernullstelle von n(x) bzw. ist der Linearfaktor (x - x_0) nur Teiler von n(x), so handelt es sich um einen** POL.

Ist ist der Linearfaktor (x - x_0) sowohl Teiler von n(x) als auch von z(x), wobei der Linearfaktor im Nenner mit der *größeren* Hochzahl (Potenz) auftritt als im Zähler, so handelt es sich ebenfalls um einen POL.

Gebrochen-rationale Funktionen

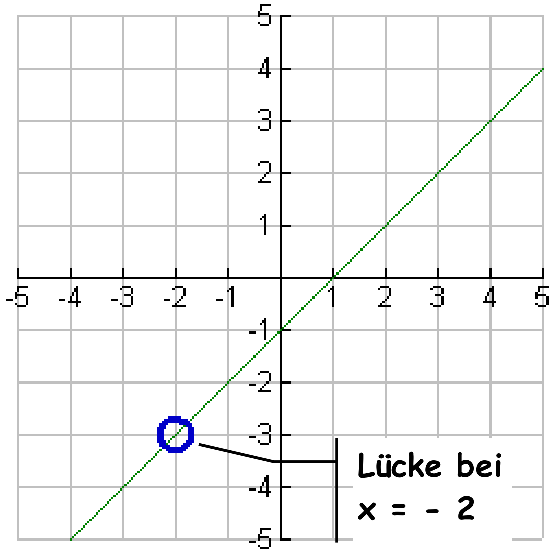
Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

Unstetigkeitsstellen (= Ermittlung über Nennernullstelle)

Defintion: Die Unstetigkeitsstelle $x_0 \in \Re$ heißt ***LÜCKE***

wenn gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

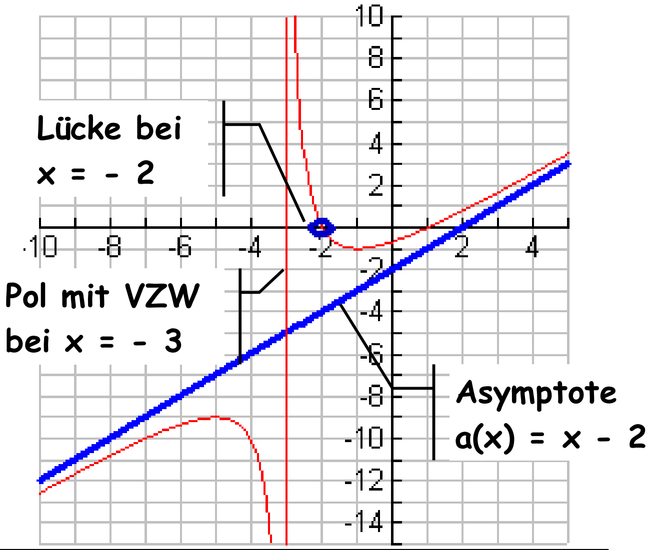
Beispiele:



$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2}; \quad D = \Re \setminus \{-2\}$$

Lücke bei x = -2; Koordinate: (-2/-3)

Keine Polstelle;



$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+2)(x+3)}; \quad D = \Re \setminus \{-3; -2\}$$

Lücke bei x = -2; Koordinate: (-2/-3)

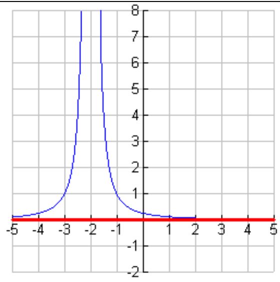
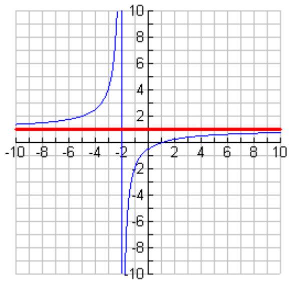
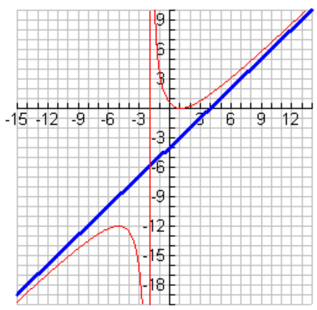
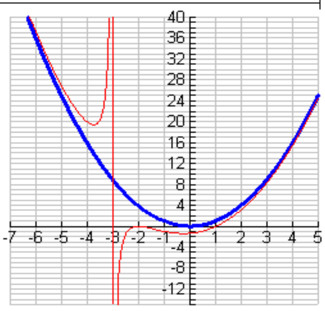
Anmerkung: Ist ist der Linearfaktor $(x - x_0)$ sowohl Teiler von n(x) als auch von z(x), wobei der Linearfaktor im Zähler mit der ***größeren oder identischen*** Hochzahl (Potenz) auftritt als im Nenner, so handelt es sich immer um eine LÜCKE.

Gebrochen-rationale Funktionen

Asymptoten (= Ermittlung über Polynomdivision oder Grenzwertbetrachtung)

Satz: *Gegeben sei eine gebrochen-rationale Funktion* $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)}$

Der Grad von z(x) sei **n**, der Grad von n(x) sei **m**.

Fall	Beschreibung	Asymptote
1	**n < m** **Beispiel:** $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$	Die horizontale Asymptote ist die x-Achse (= Abszisse); d.h. als Grenzwert ergibt sich: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ 
2	**n = m** **Beispiel:** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ $a(x)=1$	Die horizontale Asymptote ist eine Parallele zur x-Achse; d.h. als Grenzwert ergibt sich eine Konstante a: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a \quad mit \quad a\in\Re$ 
3	**n = m + 1** **Beispiel:** $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ $a(x)=x-4$	Es ergibt sich eine lineare Funktion bzw. Gerade als Asymptote (schräge Asymptote); d.h. als Grenzwert ergibt sich: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$  **Die Gerade als Asymptotengleichung wird mittels Polynomdivision ermittelt**
4	**n ≥ m + 2** **Beispiel:** $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{x+3}$ $a(x)=x^2$	Es ergibt sich eine parabelförmige oder höherwertige Asymptote (schräge Asymptote); d.h. als Grenzwert ergibt sich: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$  **Asymptote wird mittels Polynomdivision ermittelt**

Gebrochen-rationale Funktionen

Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

Verhalten der Funktion an Zähler- und Nennernullstellen: $\lim_{x \to x_0} f(x) = ?$

1. Schritt: **Ermittlung der Nullstellen von Zähler- z(x) und Nennerfunktion n(x)**

$$z(x) = 0 \quad \text{und} \quad n(x) = 0$$

2. Schritt:

Prüfung des Verhaltens

- x_0 tritt als Nullstelle nur im Zähler auf → **Nullstelle** der Funktion f(x)
- x_0 tritt als Nullstelle im Zähler und im Nenner auf
  - x_0 tritt als Nullstelle im Zähler häufiger bzw. gleich oft wie im Nenner auf → **Lücke** der Funktion f(x)
  - x_0 tritt als Nullstelle im Nenner häufiger als im Zähler auf → Polstelle
- x_0 tritt als Nullstelle nur im Nenner auf → **Polstelle**
  - **gerade** ⇒ *ohne VZW*
  - **ungerade** ⇒ *mit VZW*