Abschlussprüfung Mathematik BOS 1 2009

1. Aufgabengruppe LÖSUNG

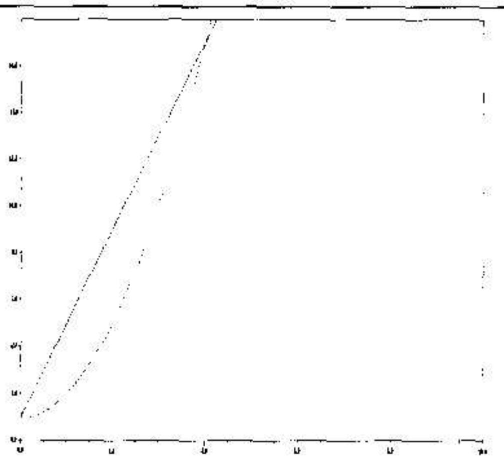
Bei einer Seilbahn liegt der Startpunkt in einem Koordinatensystem bei *S(0/1)*. Der Endpunkt E ist bei einem nicht durchhängenden Stahlseil bei E(4/?). Bei der Gondelfahrt biegt sich das Seil und kann in dem Bereich mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + 1$ beschrieben werden.

1.1.1 Zeigen Sie, dass die y-Komponente von E den Wert 17 hat.

1.1.2 Fertigen Sie eine Skizze und berechnen Sie den x- Wert, an dem die Durchbiegung in y- Richtung am größten ist! 1LE entspricht 0,5cm

1.1.3 Welchen Wert hat diese Länge?

1.1.4 Zwischen welchen Punkten P und G ist der Abstand zwischen der Geraden und der Parabel am größten? Berechnen Sie diesen!



Lösung: S(0/1) E(4/17) $f(4) = 17$

$L(x) = 4x + 1 - (x^2 + 1) \Rightarrow L(x) = 4x - x^2$

Ableitung = 0 $L'(x) = 4 - 2x \Rightarrow x = 2 \; und \; L = 4LE$

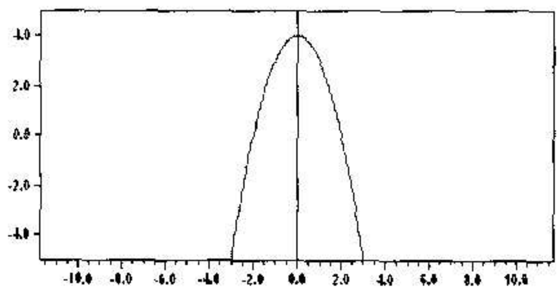
Der Abstand wird dort berechnet, wo Steigung der Geraden und der Parabel gleich sind.

$y' = f'(x) \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \;\; f(2) = 5 \Rightarrow P(2/5)$ Da der Abstand senkrecht ist muss die Gerade y_N senkrecht zu y=4x+1 durch P bestimmt werden. Der Schnittpunkt mit der Geraden y ergibt den Punkt G.

$y_N = -\frac{1}{4}x + b \;\; durch \;\; P(2/5) \Rightarrow y_N = -\frac{1}{4}x + 5{,}5$

Schnittpunkt G: y = y_N $G(\frac{18}{17}/\frac{89}{17})$ Abstand mit Pythagoras: d = 0,97LE

18 Punkte



Breite $0 < b < 4$

Zielfunktion $A = 2x \cdot y$

Nebenbedingung $y = 4 - x^2$

$A = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$

$A' = 8 - 6x^2 \Rightarrow x_E = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Breite $= 2{,}309\,m$ *Höhe* $= 2{,}66\,m$

$A''(x) < 0 \Rightarrow Maximum$

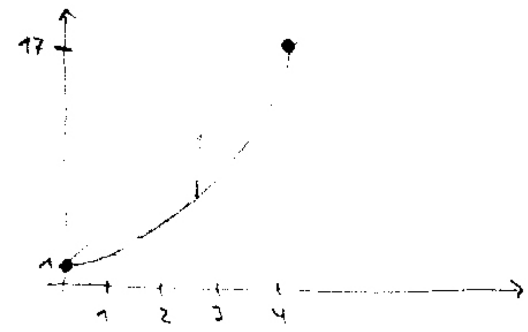
7 Punkte

11!

1.1: $S(0/1)$; E mit $x=4$ $f(x) = x^2+1$

1.1.1: $f(4) = 4^2+1 = 17$

1.1.2:



Gerade: $g(x) = 4x+1$

Parabel: $f(x) = x^2+1$

Differenzmaximum: $d(x) = g(x) - f(x)$

$d(x) = 4x+1 - x^2-1$

$d(x) = -x^2+4x$

$d'(x) = -2x+4 = 0$

$x = 2$

$d''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Max$

1.1.3: $d(2) = 4$

1.1.4: Abstand Gerade ↔ Parabel maximal

$\Rightarrow$ gleiche Steigung

$\Rightarrow \underbrace{g'(x) = 4 \text{ und } f'(x) = 2x}_{x=2}$

$\Rightarrow f(2) = 5 \Rightarrow P(2/5)$

Normale durch P mit Steigung: $m_n = -\frac{1}{4}$

$5 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b$

$b = 5{,}5$

Normale: $n(x) = -\frac{1}{4}x + 5{,}5$

Schnittpunkt mit Gerade:

$4x+1 = -\frac{1}{4}x + 5{,}5$

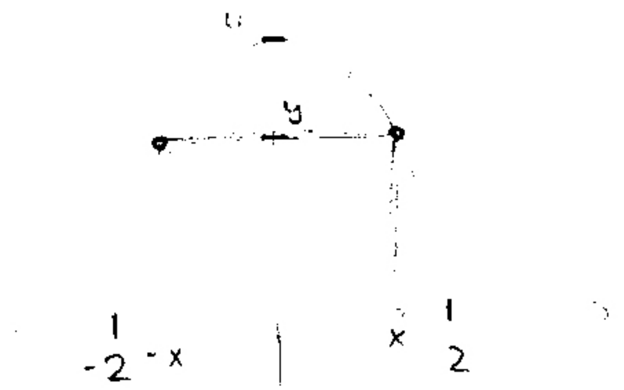
$\frac{17}{4}x = \frac{9}{2}$

$x = \frac{18}{17} \Rightarrow g\left(\frac{18}{17}\right) = \frac{72}{17} + 1 = \frac{89}{17}$

Abstand:

$e = \sqrt{\left(2-\frac{18}{17}\right)^2 + \left(5-\frac{89}{17}\right)^2}$

$e = 0{,}97$



$\mathbb{D} = [-2; 2]$

$A(x,y) = 2x \cdot y$

$A(x) = 2x \cdot f(x)$

$A(x) = 2x(4-x^2) = -2x^3 + 8x$

$A'(x) = -6x^2 + 8 = 0$

$x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$A''(x) = -12x$

$A''(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -12 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ Max.

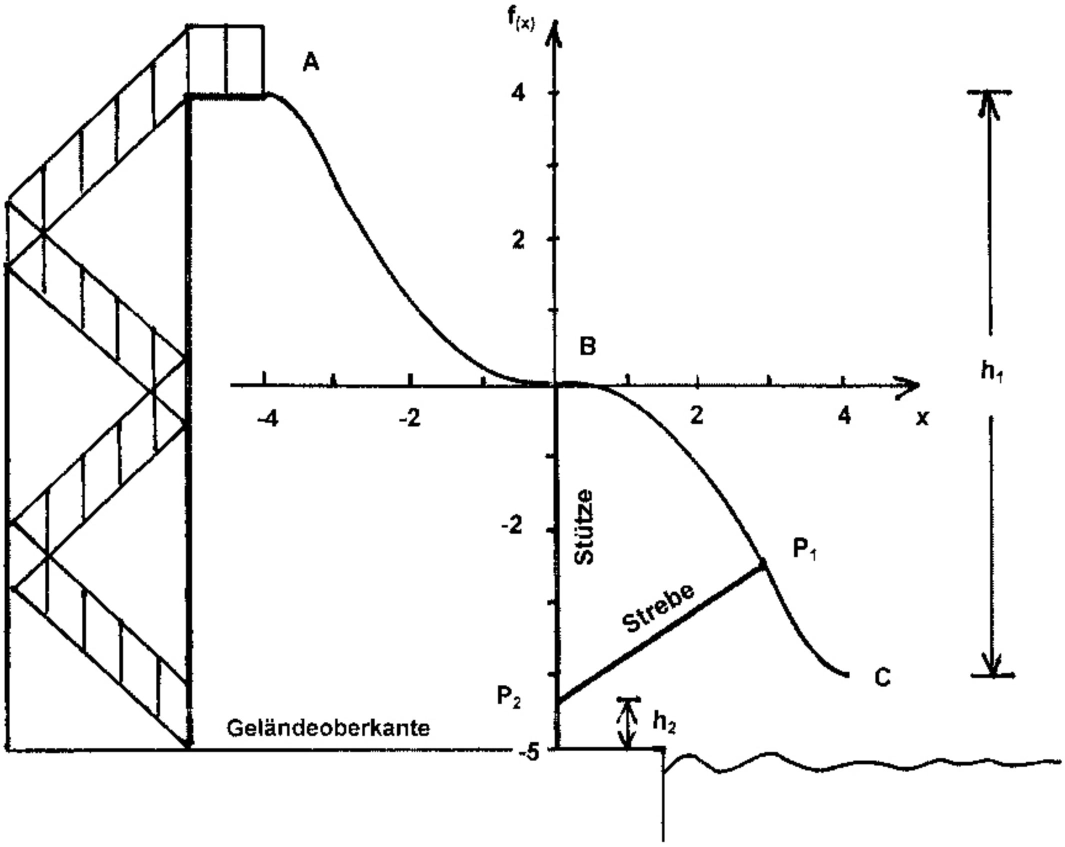
Breite: $2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Höhe: $f(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ Randwerte spielen keine Rolle, da sonst die Fläche

Abschlussprüfung Mathematik BOS I 2009

<u>Aufgabe 2.1 : *insgesamt 18 Punkte*</u>



Der Bahnverlauf einer geplanten Wasserrutsche kann mit einer ganz-rationalen Funktion 5. Grades beschrieben werden, deren Graph punktsymmetrisch ist.

Vorgegeben ist die Lage des Endpunktes C(4/-4), wo die Wasserrutsche wie in Punkt B(0/0) horizontal verläuft.

2.1.1: Berechnen Sie die Funktionsgleichung $f_{(x)}$ der Wasserrutsche.

Ansatz: $f_{(x)} = a_5 x^5 + a_3 x^3 + a_1 x$

1. Bedingung: $f'_{(0)} = 0$ *ergibt* $\underline{a_1 = 0}$ $\Rightarrow$ $a_3 = -\frac{80}{3} a_5$

2. Bedingung: $f_{(4)} = -4$ *ergibt* $\underline{256\, a_5 + 16\, a_3 = -1}$

3. Bedingung: $f'_{(4)} = 0$ *ergibt* $\underline{80\, a_5 + 3\, a_3 = 0}$ → *Gleichungssystem lösen* $256\, a_5 + 16 \cdot (-\frac{80}{3}) a$

a_5

a_3

<u>(6 Punkte)</u>

2.1.2: Zur weiteren Berechnung wählen Sie die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{170}x^5 - \frac{1}{6}x^3$

Hinweis: Mit diesen gegebenen Koeffizienten ergibt sich gegenüber der Zeichnung ein leicht veränderter Bahnverlauf!

a) Am Anfangspunkt A soll die Rutsche eine Neigung von $\alpha = 45°$ haben. Geben Sie das Intervall an, in dem die Funktion zur Beschreibung der Wasserrutsche gültig ist. Berechnen Sie die Gesamthöhe h_1 der Wasserrutsche. (Hinweis: nach A wird die Bahn zunächst noch steiler.)

Gefälle $\alpha = 45°$: $f'_{(x)} = -1$; mit $f'_{(x)} = 1/34\,x^4 - 1/2\,x^2$ ergibt sich $1/34\,x^4 - 1/2\,x^2 + 1 = 0$

Setze $x^2 = u$: $u_1 = 14{,}685 \rightarrow \underline{x_1 = -3{,}83}$ ($x_2 = 3{,}83$ und aus $u_2 = 2{,}315$ auch x_3 und x_4 liefern nicht d gesuchte Stelle)

<u>Intervall [-3,83; 4]</u>

$f_{(-3,83)} = 4{,}52 \rightarrow$ Höhe $h_1 = 4m + 4{,}52m = \underline{\mathbf{8{,}52m}}$

<u>(4 Punkte)</u>

b) Berechnen Sie die Stellen x, an denen die Bahn das größte Gefälle besitzt (mit Überprüfung).
Wie steil ist die Bahn an diesen Stellen x (Angabe des Winkels β in Grad)?

Wendestellen berechnen: $f''_{(x)} = 2/17\,x^3 - x$ und $f'''_{(x)} = 6/17\,x^2 - 1$
$2/17\,x^3 - x = 0 \rightarrow$ ($x_1 = 0$ ist Sattelpunkt); $\underline{\mathbf{x_2 = 2{,}92 \text{ und } x_3 = -2{,}92}}$
Überprüfung: $f'''_{(2,92)} = 2{,}01$ ungleich 0 (wg. Symmetrie auch $x_3 = -2{,}92$ ein Wendepunkt)

$f'_{(2,92)} = -2{,}12 \rightarrow \underline{\mathbf{\square = 64{,}80°}}$

<u>(4 Punkte)</u>

c) Der untere Teil der Wasserrutsche muss mit einer geneigten Stahlstrebe abgestützt werden, die n einer linearen Funktion beschrieben werden kann. Die Stahlstrebe wird im Punkt P_1 (2,92 / $f_{(x)}$) an der Wasserrutsche senkrecht zur Neigung der Bahn in P_1 befestigt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $g_{(x)}$ der Stahlstrebe.

$f'_{(2,92)} = -2{,}12$
$m_g = -1/-2{,}12 \rightarrow$ mit $m_g = 0{,}47$ ergibt sich $g_{(x)} = 0{,}47x + b$
b bestimmen durch Einsetzen von P_1: $f_{(2,92)} = -2{,}90$
$b = g_{(x)} - 0{,}47x = (-2{,}90) - 0{,}47\,(2{,}92) = -4{,}27 \rightarrow \underline{\mathbf{g_{(x)} = 0{,}47x - 4{,}27}}$

<u>(3 Punkte)</u>

d) Geben Sie an, in welcher Höhe h_2 sich der Befestigungspunkt P_2 befindet.

Aus $b = -4{,}27$ folgt: $h2 = (4m + 1m) - 4{,}27m = \underline{\mathbf{0{,}73m}}$

<u>(1 Punkt)</u>

<u>Aufgabe 2.2 : *insgesamt 7 Punkte*</u>

Ein Maschinenbauunternehmen produziert Schweißroboter, deren Erlös 70 Geldeinheiten (GE) je Stück beträgt.

Die variablen Kosten berechnen sich zu $V_{(x)} = \frac{1}{20}x^3 - x^2 + 50x$ **(GE), die fixen Kosten betragen 250 (GE).**

2.2.1 Erstellen Sie die Kostenfunktion $K_{(x)}$ und Erlösfunktion $E_{(x)}$.

Abschlussprüfung Mathematik BOS I 2009

$K_{(x)} = 1/20\, x^3 - x^2 + 50x + 250$; $E_{(x)} = 70\, x$

(1 Punkt)

2.2.2 Erstellen Sie die Gewinnfunktion $G_{(x)}$.

$G_{(x)} = E_{(x)} - K_{(x)} = - 1/20\, x^3 + x^2 + 20\, x - 250$

(1 Punkt)

2.1.3 Berechnen Sie nun die Gewinnzone. Berechnen Sie auch, bei welcher Stückzahl verkaufter Schweißroboter der Gewinn maximal wird und wie hoch dieser dann ist (Antwortsatz).

Aus *$- 1/20\, x^3 + x^2 + 20\, x - 250 = 0$ folgt: ($x1 = - 17{,}91$)* ***$x2 = 10$ Stück; $x3 = 27{,}9$ Stück***

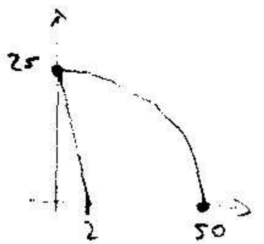
Aus $G_{(x)}' = - 3/20\, x^2 + 2x + 20$ folgt $- 3/20\, x^2 + 2x + 20 = 0 \rightarrow$ ***$x_1 = 20$ Stück*** *(und $x_2 = - 20/3$)*

$G_{(20)}' = 150$ GE

Die Gewinnzone liegt zwischen 10 Stück und 28 Stück. Ein maximaler Gewinn von 150 GE wird bei 20 Stück erzielt

(5 Punkte)

3.1:



Parabel: $c = 25$

$2500\,a + c = 0$

$2500\,a + 25 = 0$

$a = -\frac{1}{100}$

$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 25$

Gerade: $g(x) = -12{,}5x + 25$

3.2:

Nullstelle Parabel: $-0{,}012x^2 + 30 = 0$

$\frac{12}{1000}x^2 = 30$

$x^2 = 2500$

$x = 50$

$\int_0^{50}(-0{,}012x^2 + 30)\,dx = \left[-0{,}004x^3 + 30x\right]_0^{50}$

$= -500 + 1500$

$= 1000$

Δ-Gerade: $A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$

$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 30$

3.3:

$\int_0^t(-0{,}2x^2 + 8)\,dx = 0$

$\Rightarrow \left[-\frac{0{,}2}{3}x^3 + 8x\right]_0^t = 0$

$\Rightarrow -\frac{0{,}2}{3}t^3 + 8t = 0$

$\Rightarrow t\left(-\frac{0{,}2}{3}t^2 + 8\right) = 0$

$t_1 = 0 \wedge |t| = \sqrt{120}$

3.4:

Gerade aus 1: $g(x) = -12{,}5x + 25$

$\Rightarrow$ Höhe konstant: $h = 25$

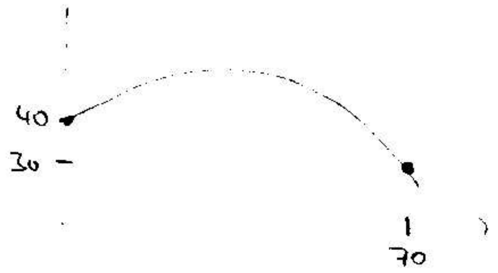
$\Rightarrow$ Steigung variabel:

$100 = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$

$100 = \frac{1}{2}\cdot g\cdot 25$

$g = 8$

$\Rightarrow g_{neu}(x) = -\frac{25}{8}x + 25$



$P(0/40)$

$Q(70/30)$ mit $m = -1$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

I.) $P(0/40)$: $c = 40$

II.) $Q(70/30)$: $4900a + 70b + 40 = 30$

III.) Q mit $m = -1$: $140a + b = -1$

II.) $490a + 7b = -1$

III.) $140a + b = -1 \quad |\cdot(-7)$

II.) $490a + 7b = -1$

III.) $-980a - 7b = 7$

II.) + III.) $-490a = 6$

$a = -\frac{6}{490} = -\frac{3}{245}$

$b = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{245}x^2 + \frac{5}{7}x + 40$

4. Aufgabengruppe:

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen (25 Punkte)

Endlich scheint wieder die Sonne und Kurt und Sabine können gemütlich zum Strandbad gehen. Dort angekommen richten Sie sich häuslich am warmen Sandstrand ein und nach einem ersten kühlen Badegang hat Kurt Durst. Er öffnet eine Halbliter-Geträn-kedose, trinkt einen großen Schluck und stellt sie in den ebenen Sand. Doch das hat er etwas unachtsam gemacht, so dass die Dose umfällt und das kühle Nass gluckert in den Sand. „Mist" flucht er und während er den Rest rettet: „Dass diese Dosen nie im Sand stehen bleiben!"„Das liegt daran, dass ihr Schwerpunkt ziemlich hoch liegt " meint Sabine. „ So, und wo liegt der Schwerpunkt, wenn sie nur zum Teil gefüllt ist – so wie eben gerade?" will Kurt wissen.

Die Lösung ist abhängig von der Masse des Dosenmaterials und der Masse der Flüssigkeit. In unserem Fall kann der Schwerpunkt in Abhängigkeit der Füllhöhe x vereinfacht durch die Funktionsgleichung

$$s(x) = \frac{20 - x}{40(x+1)} + \frac{x}{40}$$

beschrieben werden.

Wobei die Variable x die Füllhöhe der Flüssigkeit in der Dose in cm darstellt.

3	

4.1 Zeigen Sie nun schlüssig, dass daraus folgende Funktion entsteht:

$$s(x) = \frac{x^2 + 20}{40(x+1)}$$

Lösung:

$$s(x) = \frac{20-x}{40(x+1)} + \frac{x}{40} = \frac{20-x+x(x+1)}{40(x+1)} = \frac{20-x+x^2+x}{40(x+1)} = \frac{x^2+20}{40(x+1)}$$

2	

4.2 Bestimmen Sie den Definitionsbereich von s(x)

(i) aus mathematischer Sicht.

(ii) aus praktischer Betrachtung, wenn die Dose eine innere Höhe von 20 cm besitzt.

Lösung: $(i) \quad D = \Re \setminus \{-1\}$ $\qquad (ii) \quad D = [0\,;20]$

4.3 Prüfen Sie die Funktion s(x) auf Symmetrieeigenschaften. | 2 | |

Lösung: ***Ergebnis: Keine Symmetrie***

$$s(-x)=\frac{(-x)^2+20}{40(-x+1)}=\frac{x^2+20}{-40(x-1)}=-\frac{x^2+20}{40(x-1)}\neq -s(x)\ und \neq s(x)$$

4.4 Beweisen Sie, dass die Funktion s(x) keine Nullstellen besitzt. | 2 | |

Lösung:

$$s(x) = \frac{x^2+20}{40(x+1)} = 0 \xrightarrow{\cdot 40(x+1)} x^2+20 = 0 \xrightarrow{-20} x^2 = -20$$

=> keine reelle Lösung möglich!

4.5 Wo liegt der Schwerpunkt der Dose wenn sie | 4 | |

(i) ganz leer ist? (ii) ganz voll ist?

Lösung:

$$(i)\quad s(0) = \frac{0+20}{40(0+1)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$(ii)\quad s(20) = \frac{20^2+20}{40(20+1)} = \frac{420}{840} = \frac{1}{2}$$

4.6 Welche Füllhöhen liegen vor, wenn der Schwerpunkt bei s(x) = 0,3 liegen soll? | 4 | |

Erklären Sie mit Worten, was die 0,3 bedeuten.

Lösung:

$$s(x) = \frac{x^2+20}{40(x+1)} = 0,3 \xrightarrow{\cdot 40(x+1)} x^2+20 = 12(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2-12x+8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{12\pm\sqrt{144-32}}{2} = 6\pm2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 0,71\,[cm] \quad und \quad x_2 \approx 11,29\,[cm]$$

Anmerkung: s(x) stellt die Lage des Schwerpunkts in Abhängigkeit der Füllhöhe x dar. Der Schwerpunkt liegt nun etwas tiefer und die Dose steht stabiler als bei 4.5

4.7 (i) Ermitteln Sie das Minimum der Funktion. | 8 | |

Eine Überprüfung ist nicht notwendig.

(ii) Berechnen Sie auch den Punkt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich folgender Fragestellung:

=> Welchen Punkt haben Sie berechnet?

=> Welche Flüssigkeitsmenge muss man trinken, damit die Dose am stabilsten steht?

Lösung:

$$s(x) = \frac{x^2+20}{40(x+1)}$$

$$s'(x) = \frac{2x\cdot 40(x+1)-\left(x^2+20\right)\cdot 40}{\left[40(x+1)\right]^2} \overset{:40}{=} \frac{2x^2+2x-x^2-20}{40\cdot(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-20}{40\cdot(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-20}{40\cdot(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x-20 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -5{,}58 \quad und \quad x_2 = 3{,}58\,[cm]$$

Nur Lösung x_2 ist relevant, da keine negativen Füllhöhen existieren!

$$s(3{,}58) = 0{,}179 = 17{,}9\,[\%]$$

Prüfung des Steigungsverhaltens in der Umgebung von x_2.

$$s'(3) = \frac{3^2+2\cdot 3-20}{40\cdot(3+1)^2} = \frac{-5}{640} = -0{,}0078 < 0 \Rightarrow monoton\ fallend$$

$$s'(4) = \frac{4^2+2\cdot 4-20}{40\cdot(4+1)^2} = \frac{4}{1.000} = 0{,}004 > 0 \Rightarrow monoton\ steigend$$

$\Rightarrow$ x_2 = 3,58 ist ein Minimum

Auswertung: Der Schwerpunkt der Dose liegt am niedrigsten, wenn die Füllhöhe bei 3,58 cm liegt.

Kurt muss also ca. 82,1 % der Flüssigkeit trinken, wenn der minimale Schwerpunkt erreicht werden und die Dose damit am stabilsten stehen soll.