Berufsbildende Schule Landau i.d. Pfalz

Fachhochschulreifeprüfung 2011

Schulformen:

- Höhere Berufsfachschule
  - Fremdsprachen & Bürokommunikation
  - Organisation & Officemanagement
  - Handel und E -Commerce
- Berufsoberschule I
- Duale Berufsoberschule

Prüfungsfach: Mathematik

Bearbeitungszeit: Drei Zeitstunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner nicht graphikfähig

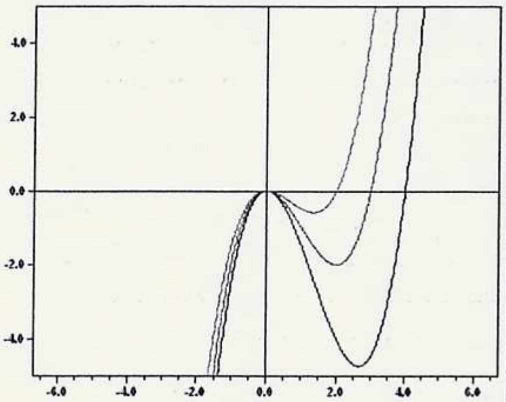
Hinweise:

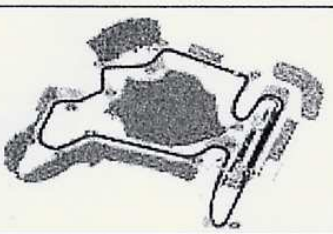
- Von den **vier** Aufgabengruppen sind nach freier Wahl, nur **drei** zu bearbeiten!
- Jede Aufgabengruppe ist auf einem gesonderten Bogen zu bearbeiten.
- Fehlende Aufgaben sind umgehend der Prüfungsaufsicht anzuzeigen

Aufgabengruppe I

Aufgabe 1.1

Ein Teil einer zu planenden Autorennstrecke verläuft im Bereich $-3 \leq x \leq 5$ nach der Funktionsgleichung $f_k(x) = 0{,}5x^3 - kx^2$ mit $0 \leq k \leq 2$





a) Berechnen Sie für k=2 die Scheitelpunkte der Rechts – und Linkskurve. (Extremwerte). — 3 P

b) Berechnen Sie nun die Extremwerte für k allgemein. (nur mögliche x – Werte, Nachweis nicht gefordert) — 3 P

c) Wie muss k gewählt werden, wenn der Scheitelpunkt der Linkskurve bei x = 3 liegen soll? — 2 P

d) Bei der Computersimulation stellte sich heraus, dass die Autos sehr oft von der Fahrbahn abkamen, wenn das GPS in der Linkskurve genau nach NNO zeigte. Berechnen Sie diesen Punkt P für k =1,5. — 3 P

Aufgabe 1.2

Zur Flächenberechnung der Rennstrecke müssen folgende Gleichungen gelöst werden: — 4 P

$$a)\ \int_0^2 (x^3k + x)\,dx = 18 \qquad b)\ \int_{-k}^0 (2 - x^2)\,dx = 0 \qquad \text{Berechnen Sie k.}$$ — 4 P

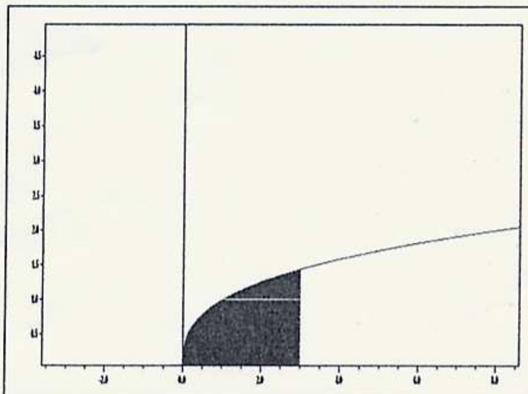
Aufgabe 1.3

Der Querschnitt einer Messehalle ist symmetrisch. Die Gesamtbreite beträgt 6LE. Die Hälfte wird beschrieben durch die Funktionsgleichung:

$f(x) = 1{,}5 \cdot \sqrt[5]{x^3}$ Siehe Skizze.

a) Berechnen Sie die gesamte Querschnittsfläche der Halle. — 1 P

b) Gefordert ist die Integralfunktion -mit Grenzen- in Wurzelschreibweise. — 5 P



(11)

1.1 $f_k(x) = \frac{1}{2}x^3 - kx^2$

a) $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$

$f_2'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}x - 4\right) = 0$

$x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{8}{3}$

$f_2''(x) = 3x - 4$

$f_2''(0) = -4 < 0 \Rightarrow HP(0|0)$

$f_2''\left(\frac{8}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow TP\left(\frac{8}{3} \middle/ -\frac{128}{27}\right)$

3

b) $f_k'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2kx = 0 \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}x - 2k\right) = 0$

$x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{4}{3}k$

3

c) $x = 3 \Rightarrow 3 = \frac{4}{3}k \Rightarrow k = \frac{9}{4}$

2

d) $f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ $\qquad m = \tan\alpha \qquad \alpha = 67{,}5°$

$f_{\frac{3}{2}}'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = 2{,}41 \quad \left| \cdot \frac{2}{3}\right.$

$x^2 - 2x - 1{,}61 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 6{,}44}}{2}$ $\quad x_1 = 2{,}61 \quad x_2 = -0{,}61$

$\mathbb{L} = \{2{,}61\}$ wegen $x > 0$

$\Rightarrow P(2{,}61 / -1{,}315)$

3

1.2

a) $\int_0^2 (kx^3 + x)\,dx = 18$

$\left[\frac{1}{4}kx^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 18$

$4k + 2 = 18 \Rightarrow k = 4$

4

b) $\int_{-k}^{0} (2 - x^2)\,dx = 0$

$\left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-k}^{0} = 0$

$0 - \left(-2k + \frac{1}{3}k^3\right) = 0$

$-\frac{1}{3}k^3 + 2k = 0 \Rightarrow k\left(-\frac{1}{3}k^2 + 2\right) = 0$

$k_1 = 0 \wedge k_{2,3} = \pm\sqrt{6}$

4

1.3

a) $2\int_0^3 1{,}5 \cdot x^{\frac{3}{5}}\,dx = 3 \cdot \left[\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}\right]_0^3 = \frac{15}{8} \cdot 3^{\frac{8}{5}} = 10{,}874$

b) vgl. a)

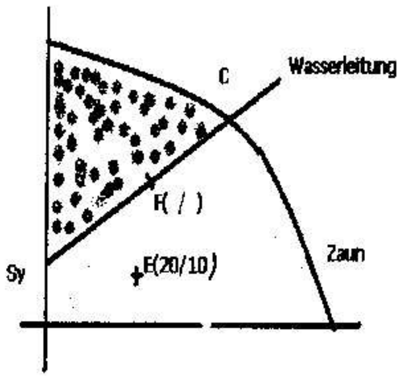
6

Aufgabengruppe 2

Für die Landesgartenschau liegt ein Teilgebiet koordinatenmäßig im I. Quadranten. Die Fläche ist weiterhin begrenzt durch einen Zaun, der durch die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{-9}{605}x^2+45$ beschrieben ist. Eine vorhandene Wasserleitung verläuft nach der Funktionsgleichung $g_1: y_1=\frac{x}{2}+10$ durch S_y und C. (C ist der Schnittpunkt der Wasserleitung mit dem Zaun)

Hinweis:

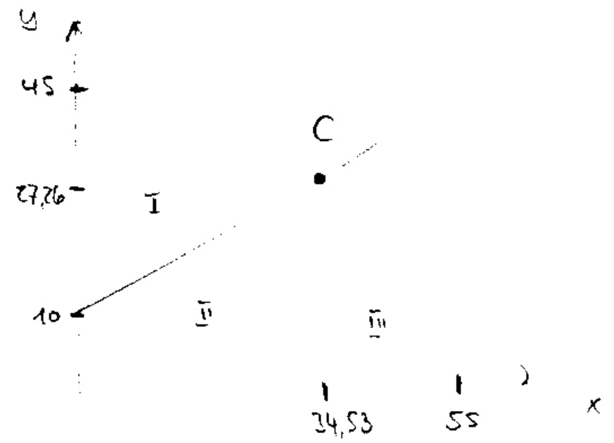
Alle Angaben in Meter. Bei Integralrechnung ist immer eine Stammfunktion gefordert.



2.1 Übertragen Sie die Skizze und vervollständigen Sie. (Achseneinteilung, Koordinaten der Punkte…)	3 P
2.2 Die Fläche oberhalb der Wasserleitung soll mit roten Rosen, die Fläche unterhalb mit gelben Rosen bepflanzt werden. Berechnen Sie die jeweiligen Flächen.	8 P
2.3 Im Punkt E soll eine Zapfstelle installiert werden. Berechnen Sie die Länge der kürzesten Verbindung zur vorhandenen Wasserleitung und bezeichnen Sie den Punkt H.	6 P
2.4 Im Punkt F, der 30m von S_y in Richtung C liegt, soll eine weitere Zapfstelle installiert werden. Berechnen Sie die genauen Koordinaten von F.	8 P

A2

2.1



Berechnung Punkt C: $-\frac{9}{605}x^2+45 = \frac{1}{2}x+10$

$$-\frac{9}{605}x^2 - \frac{1}{2}x + 35 = 0$$

$x_1 = 34{,}53 \qquad x_2 = -68{,}14$

$y_1 = 27{,}26$

C (34,53 / 27,26)

3

2.2 Fläche II: $A_{Trapez} = \frac{10+27{,}26}{2} \cdot 34{,}53$

$A_{Trapez} = 643{,}3$

Fläche III: $\int_{34,5}^{55} \left(-\frac{9}{605}x^2+45\right)dx = \left[-\frac{3}{605}x^3+45x\right]_{34,5}^{55} = 301{,}12$

Fläche I: $\int_0^{34,5} f(x)\,dx - 643{,}3 = 1.348{,}9 - 643{,}3 = 705{,}6$

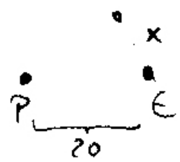
=> Rote Rosen: 705,6

=> gelbe Rosen: 301,12 + 643,3 = 944,4

8

2.3 $g(x) = \frac{1}{2}x + 10$

$E(20|10)$



(1) P: $10 = \frac{1}{2}x + 10 \rightarrow P(0|10)$

(2) $\sin\alpha = \frac{x}{20}$ mit $\tan\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26{,}57$

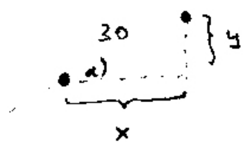
$x = 20 \cdot \sin\alpha$

$x = 20 \cdot 0{,}447$

$x = 8{,}944$

6

2.4 $g(x) = \frac{1}{2}x + 10$



$\alpha = 26{,}57$

$\cos\alpha = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30 \cdot \cos\alpha$

$x = 26{,}83$

$g(26{,}83) = 23{,}42$

$F(26{,}83 / 23{,}42)$

8

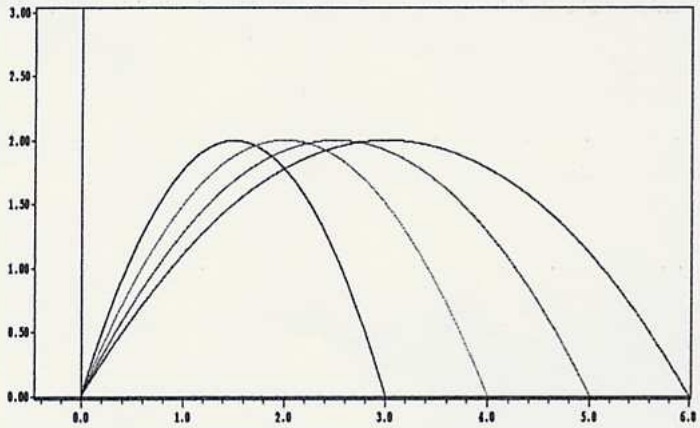
Aufgabengruppe 3

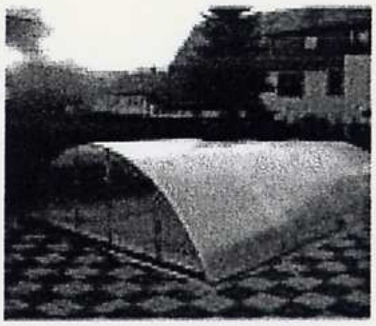
3.1Aufgabe

Die Firma Wasserspaß fertigt parabelförmige Überdachungen für Schwimmbäder. Die Höhe soll immer 2m betragen, die Breite der Schwimmhalle ist t in Meter.

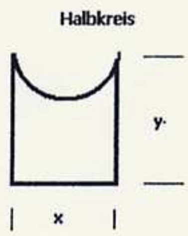
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung wenn t = 3 ist. 4 P

b) Bestimmen Sie die Funktionsschar $f_t(x)$ für allgemeines t in der Form $f_t(x) = ax^2 + bx + c$ 8 P





Aufgabe 3.2



Bei dem abgebildeten Profil soll der Umfang 10m betragen. Berechnen Sie x und y so, dass die eingeschlossene Fläche maximal wird. 13 P

(A3)

3.1 a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$P(0|0) \qquad Q(t/0) \qquad R(\frac{1}{2}t/2)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I)} & f(0) = & c = 0 \\ \text{II)} & f(t) = & at^2 + bt = 0 \\ \text{III)} & f(\frac{1}{2}t) = & \frac{1}{4}at^2 + \frac{1}{2}bt = 2 \end{array}\right\} \quad \text{II} - 2\,\text{III}: \frac{1}{2}at^2 = -4 \qquad a = \frac{-8}{t^2}$$

$$bt = -at^2$$

$$bt = 8 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{8}{t}$$

$t = 3$: $\quad f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$

4

b) $f_t(x) = -\frac{8}{t^2}x^2 + \frac{8}{t}x$

8

3.2 $A = xy - \frac{1}{2}r^2\pi \quad$ mit $r = \frac{1}{2}x$

$A = xy - \frac{1}{8}x^2\pi$

$U = x + 2y + r\pi \quad$ mit $r = \frac{1}{2}x$

$U = x + 2y + \frac{1}{2}x\pi = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x\pi$

$A = 5x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2\pi - \frac{1}{8}x^2\pi$

$A = 5x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^2\pi$

$A' = 5 - x - \frac{3}{4}x\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{1 + \frac{3}{4}\pi}$

$A'' = -1 - \frac{3}{4}\pi < 0 \Rightarrow$ Max. $\qquad x = 1,489$

$y = 3,085$

13

Aufgabengruppe 4

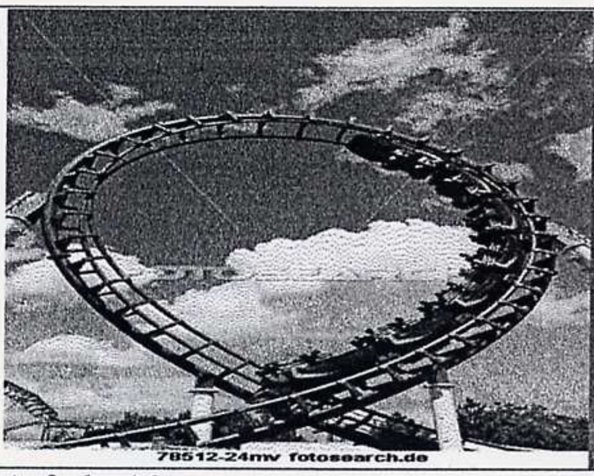
Aufgabe 4.1

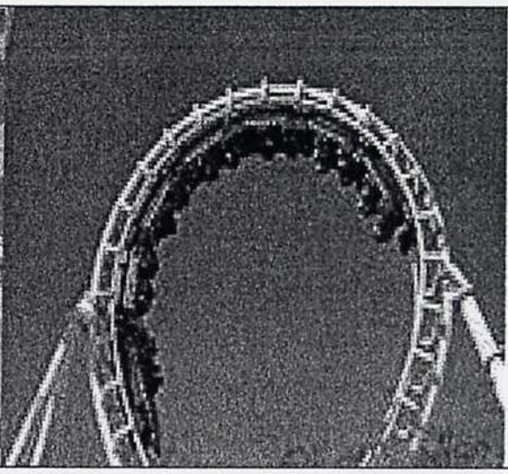
Eine Achterbahn verläuft in einem Teilbereich nach der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 3x$. Vom Punkt $P(1/0)$ soll ein Laserstrahl so eingestellt werden, dass er die Bahn berührt.

a) Berechnen Sie diesen Berührpunkt B. — 10 P

b) Im Punkt $T\left(-1{,}5 / f_{(-1{,}5)}\right)$ wird die Bahn durch eine tangentiale Strebe gestützt. Berechnen Sie die Geradengleichung dieser Strebe. — 4 P

c) Erstellen Sie eine saubere exakte Zeichnung. — 3 P

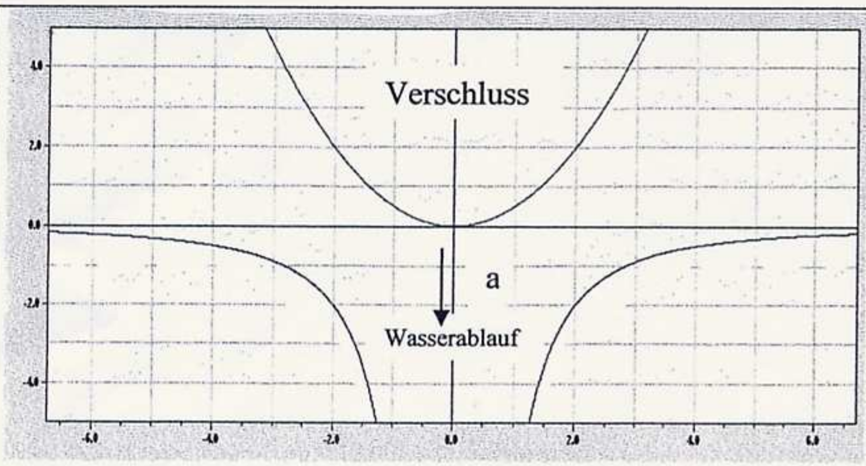




Aufgabe 4.2

Ein Wasserablauf wird durch die Funktionsgleichung $f(x) = \dfrac{-8}{x^2}$ beschrieben. Der Verschlussstopfen durch die Funktionsgleichung g(x)= $0{,}5x^2$

Wie weit muss der Verschluss von seiner Ausgangsstellung gesenkt werden, damit der Ablauf geschlossen ist? Berechnen Sie diese Länge a. Siehe Skizze. — 8 P



(A4)

4.1 $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

a) $P(1/0) \rightarrow \quad f'(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$$3x^2 - 3 = \frac{x^3 - 3x - 0}{x - 1}$$

$$3x^3 - 2x - 3x^2 + 3 = x^3 - 3x$$

$$2x^3 - 3x^2 + 3 = 0$$

$\Rightarrow$ Lösung per Iteration: $\mathbb{R}$ (-0,86 / 1,84)

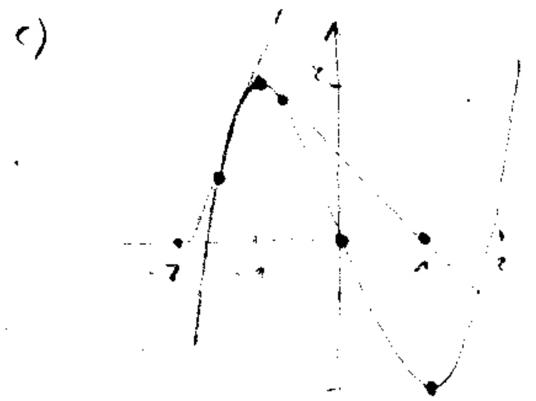
10

b) $f(-1,5) = 1,13$ $\quad 1,13 = 3,75 \cdot (-1,5) + b$

$f'(-1,5) = 3,75$ $\quad b = 6,76$

$t(x) = 3,75x + 6,76$

4

c) 

3

$f(x) = -\frac{8}{x^2} = -8x^{-2}$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \to \quad g_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - a$

Bed.: Schnittpunkt: $\quad f(x) = g_a(x)$

$$-\frac{8}{x^2} = \frac{1}{2}x^2 - a \qquad \Big| \cdot x^2$$

(i) $\quad \frac{1}{2}x^4 - ax^2 + 8 = 0$

Berührpunkt: $\quad f'(x) = g_a'(x)$

(ii) $\quad \frac{16}{x^3} = x \quad \Rightarrow \quad x = 2$

eingesetzt in (i)

$$\frac{1}{2} \cdot 16 - 4a + 8 = 0$$

$$4a = 16$$

$$a = 4$$

8