

1.) Quadratischen Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$

Lösung:

$$x^2 + 4x = 12 \xrightarrow{\text{quadr. Ergänzung}} x^2 + 4x + 2^2 = 12 + 2^2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{}} x+2 = \pm 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -6$$

b) $-3x^2 - 18x + 21 = 0$

Lösung:

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} -21 \\ :(-3) \end{smallmatrix}} x^2 + 6x = 7 \xrightarrow{\text{quadr. Ergänzung}} x^2 + 6x + 3^2 = 7 + 3^2$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{}} x+3 = \pm 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -7$$

c) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Lösung:

$$\text{Sub.: } x^2 = u \Rightarrow u^2 - 9u + 20 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 5 \wedge u_2 = 4$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{5} \wedge x_{3/4} = \pm 2$$

d) $2x^6 - 6x^3 + 4 = 0$

Lösung:

$$\text{Sub.: } x^3 = u \Rightarrow 2u^2 - 6u + 4 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 1 \wedge u_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = \sqrt[3]{2}$$

2.) Textaufgaben zu quadratischen Gleichungen

- a) Subtrahiert man vom Quadrat einer Zahl 78, so erhält man 66. Wie heißt die Zahl?

$$x^2 - 78 = 66 \xrightarrow{+78} x^2 = 144$$

Lösung:

$$\Rightarrow x_1 = 12 \wedge x_2 = -12$$

- b) Das Produkt zweier Zahlen ist 184. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 31. Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung:

$$I.) \quad x \cdot y = 184 \quad II.) \quad x + y = 31 \Rightarrow y = 31 - x$$

$$\Rightarrow x \cdot (31 - x) = 184 \Rightarrow -x^2 + 31x = 184$$

$$\Rightarrow x_1 = -8 \wedge x_2 = 23$$

Antwort : Die beiden Zahlen lauten 8 und 23!

- c) An einer Straßenkreuzung wird ein Fußweg angelegt. Von den angrenzenden Grundstücken wird ein 2 m breiter Streifen benötigt. Das 609 m² große rechteckige Eckgrundstück wird dadurch um 96 m² kleiner. Wie lang und wie breit war das Grundstück vorher?

Skizze:



Lösung:

$$I.) \quad x \cdot y = 609 \Rightarrow y = \frac{609}{x} \quad II.) \quad (x-2) \cdot (y-2) = 513$$

$$\Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 513 \Rightarrow 609 - 2x - 2 \cdot \frac{609}{x} + 4 = 513$$

$$\xrightarrow{\cdot x} -2x^2 + 100x - 1.218 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 21 \wedge x_2 = 29$$

$$\Rightarrow y_1 = 29 \wedge y_2 = 21$$

3.) Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen

Für welche reelle Zahl k hat die Gleichung $x^2 + 2kx + 9 = 0$ nur eine Lösung?

Lösung:

$$x^2 + 2kx + 9 = 0 \xrightarrow{\text{quadr. Ergänzung}} x^2 + 2kx + k^2 = -9 + k^2$$

$$\Rightarrow -9 + k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 3$$