

1.) Quadratischen Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$a) \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

Lösung:

$$x^2 + 4x = 12 \xrightarrow{\text{quadr. Ergänzung}} x^2 + 4x + 2^2 = 12 + 2^2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x+2 = \pm 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -6$$

$$b) \quad -3x^2 - 18x + 21 = 0$$

Lösung:

$$\xrightarrow{-21 : (-3)} x^2 + 6x = 7 \xrightarrow{\text{quadr. Ergänzung}} x^2 + 6x + 3^2 = 7 + 3^2$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x+3 = \pm 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -7$$

$$c) \quad x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

Lösung:

$$\text{Sub.: } x^2 = u \Rightarrow u^2 - 9u + 20 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 5 \wedge u_2 = 4$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{5} \wedge x_{3/4} = \pm 2$$

$$d) \quad 2x^6 - 6x^3 + 4 = 0$$

Lösung:

$$\text{Sub.: } x^3 = u \Rightarrow 2u^2 - 6u + 4 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 1 \wedge u_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = \sqrt[3]{2}$$

2.) Textaufgaben zu quadratischen Gleichungen

- a) Subtrahiert man vom Quadrat einer Zahl 78, so erhält man 66. Wie heißt die Zahl?

$$x^2 - 78 = 66 \xrightarrow{+78} x^2 = 144$$

Lösung: $\Rightarrow x_1 = 12 \wedge x_2 = -12$

- b) Das Produkt zweier Zahlen ist 184. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 31. Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung:

$$\begin{aligned} I.) \quad x \cdot y &= 184 & II.) \quad x + y &= 31 \Rightarrow y = 31 - x \\ \Rightarrow x \cdot (31 - x) &= 184 \Rightarrow -x^2 + 31x &= 184 \\ \Rightarrow x_1 &= -8 \wedge x_2 &= 23 \end{aligned}$$

Antwort: Die beiden Zahlen lauten 8 und 23!

- c) An einer Straßenkreuzung wird ein Fußweg angelegt.

Von den angrenzenden Grundstücken wird ein 2 m breiter Streifen benötigt. Das 609 m^2 große rechteckige Eckgrundstück wird dadurch um 96 m^2 kleiner. Wie lang und wie breit war das Grundstück vorher?

Skizze:



Lösung:

$$\begin{aligned} I.) \quad x \cdot y &= 609 \Rightarrow y = \frac{609}{x} & II.) \quad (x-2) \cdot (y-2) &= 513 \\ \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 &= 513 \Rightarrow 609 - 2x - 2 \cdot \frac{609}{x} + 4 &= 513 \\ \xrightarrow{\cdot x} -2x^2 + 100x - 1218 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 21 \wedge x_2 &= 29 \\ \Rightarrow y_1 &= 29 \wedge y_2 &= 21 \end{aligned}$$

3.) Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen

Für welche reelle Zahl k hat die Gleichung $x^2 + 2kx + 9 = 0$ nur eine Lösung?

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 + 2kx + 9 &= 0 \xrightarrow{\text{quadr. Ergänzung}} x^2 + 2kx + k^2 &= -9 + k^2 \\ \Rightarrow -9 + k^2 &= 0 \Rightarrow k &= \pm 3 \end{aligned}$$