Musterlösung **11. Jgst.** **3. Klassenarbeit** **Datum: 02.06.2008**

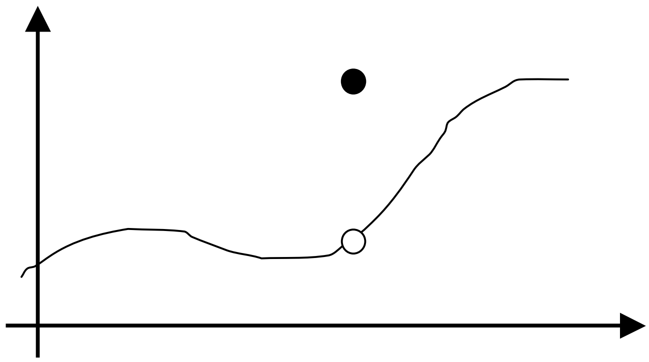
Klasse: DBOS 07 **Fach: Mathematik**

Themen: **Stetigkeit; Differenzierbarkeit; Extremwerte bei ganzrat. Fkt.**

Stetigkeit

1.) Erklären Sie, warum diese beiden Funktionen nicht stetig sind und gegen welchen Teil der Definition der Stetigkeit sie verstoßen.

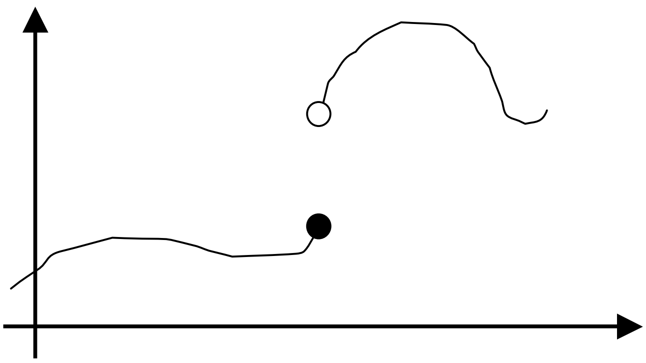
a)



Lösung: links- und rechtseitiger Grenzwert sind identisch, aber der Funktionswert stimmt nicht mit den Grenzwerten überein.

$$\lim_{h \to 0} f\left(x_0 + h\right) = \lim_{h \to 0} f\left(x_0 - h\right) \neq f\left(x_0\right)$$

b)



Lösung: links- und rechtseitiger Grenzwert sind nicht identisch

$$\lim_{h \to 0} f\left(x_0 + h\right) \neq \lim_{h \to 0} f\left(x_0 - h\right) = f\left(x_0\right)$$

2.) Nachweis der Stetigkeit

Gegeben sei folgende abschnittweise definierte Funktion:

$$f_k(x) = \begin{cases} 2x^2 + k & \text{für } x \le 1 \\ -kx + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für welchen Wert von $k \in \Re$ ist $f_k(x)$ für $x \in \Re$ stetig?

Lösung:

$$\text{linke Seite}: \lim_{\substack{x \to 1-h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1-h \\ h \to 0}} \left(2x^2 + k\right) = \lim_{h \to 0} \left[2(1-h)^2 + k\right] = 2 + k$$

$$\text{rechte Seite}: \lim_{\substack{x \to 1+h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1+h \\ h \to 0}} \left(-kx + 1\right) = \lim_{h \to 0} \left[-k(1+h) + 1\right] = -k + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 + k \quad = \quad -k + 1 \quad \Rightarrow \quad 2k \quad = \quad -1 \quad \Rightarrow \quad k \quad = \quad -\frac{1}{2}$$

Differenzierbarkeit

1.) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ mittels Differentialquotient.

Lösung:

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} (2x + h) \quad = \quad 2x$$

2.) Bilden Sie die Ableitungen $f'(x)$ mittels Potenzregel:

a) $f(x) = \frac{3}{5}x^3 - 2x + 4$

Lösung: $f'(x) = \frac{9}{5}x^2 - 2$

b) $f_k(x) = x^4 - 2x^2 + k^2$

Lösung: $f_k'(x) = 4x^3 - 4x$

c) $f(x) = 2x^{n+1} - 3x^n$

Lösung: $f'(x) = 2(n+1)x^n - 3nx^{n-1}$

d) $f(x) = x^3 - \frac{3}{x^2}$

Lösung:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{x^2} = x^3 - 3x^{-2} \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x^{-3} = 3x^2 + \frac{6}{x^3}$$

e) $f(x) = (3x^2 - 2)^2$

Lösung:

$$f(x) = (3x^2 - 2)^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4 \qquad f'(x) = 36x^3 - 24x$$

3.) Welche Steigung besitzt die Funktion $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ an der Stelle x = 2 ?

Lösung: $f'(x) = 6x^2 - 10x \xrightarrow{\text{einsetzen}} f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 4$

4.) An welchen Stellen hat die Funktion $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 9x$ die Steigung m = 6?

Lösung:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x - 9 \xrightarrow{\text{gleichsetzen}} 12x^2 - 24x - 9 = 6$$

$$\Rightarrow \quad 12x^2 - 24x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 1,25 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,5 \quad \wedge \quad x_2 = -0,5$$

5.) Differenzenquotient

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$

a) Untersuchen Sie das Verhalten des Differenzenquotienten, in dem Sie die Angaben der folgenden Tabelle vervollständigen:

h	x	f(x)	x+h	f(x+h)	Differenzenquotient
1	2	2	3	10,5	$m = \frac{10{,}5-2}{1} = 8{,}5$
0,1	2	2	2,1	2,5305	$m = \frac{2{,}5305-2}{0{,}1} = 5{,}305$
0,01	2	2	2,01	2,0503	$m = \frac{2{,}0503-2}{0{,}01} = 5{,}03$
0,001	2	2	2,001	2,005003	$m = \frac{2{,}005003-2}{0{,}001} = 5{,}003$

b) Was drückt der Differenzenquotient eigentlich genau aus?

Lösung: Der Differenzenquotient drückt die Steigung der Sekante aus:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

c) Mittels Ableitung der Funktion könnten Sie Ihr Ergebnis prüfen? Führen Sie dies durch und erklären Sie, warum dies mit dem Tabellenwert nahezu übereinstimmt.

Lösung:

Ableitung: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1 \xrightarrow{\text{einsetzen}} f'(2) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 1 = 5$

Die Ableitung entsteht durch den Grenzwertübergang von h gegen den Wert Null.

Dadurch wird aus der Sekante eine Tangente und der Grenzwert stellt die gesuchte Steigung der Tangente in einer unendlich kleinen Umgebung des Punktes P(x/f(x)) dar.

6.) Kurvendiskussion

$$f(x) = -x^3+6x^2-9x \quad mit \quad x\in\Re$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x\left(-x^2+6x-9\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad -x^2+6x-9=0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_{2/3}=3 \quad (doppelte\ NS)$$

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

$$f'(x) = -3x^2+12x-9 \qquad f''(x) = -6x+12$$
$$f'''(x) = -6$$

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von $f(x)$.

$$f'(x) = -3x^2+12x-9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-108}}{-6}=\frac{-12\pm6}{-6}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=1 \quad \wedge \quad x_1=3$$

$$\Rightarrow \quad f''(1) = (-6)\cdot1+12 = 6>0 \quad \Rightarrow \quad Min(1\mid-4)$$

$$\Rightarrow \quad f''(3) = (-6)\cdot3+12 = -6>0 \quad \Rightarrow \quad Max(3\mid0)$$

d) Legen Sie die Monotonieintervalle fest.

$$I_1 = \left]-\infty;1\right[\qquad \text{streng monoton fallend}$$
$$I_2 = \left]1;3\right[\qquad \text{streng monoton steigend}$$
$$I_3 = \left]3;\infty\right[\qquad \text{streng monoton fallend}$$

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2.

$$f(2) = -2 \qquad f'(2) = 3 = m$$

y-Achsenabschnitt: $(-2) = 3\cdot2+b \quad \Rightarrow \quad b=-8$

$$Tangentengleichung: \quad t(x) = 3x-8$$

7.) Multiple Choice zu Ableitungen

a) Die Ableitung einer Funktion ist

- ☐ eine Gleichung?
- ☐ eine Zahl?
- ☒ eine Funktion?
- ☐ eine Zeichnung?

b) Die Ableitung einer Funktion in einem Punkt ist

- ☐ eine Gleichung?
- ☒ eine Zahl?
- ☐ eine Funktion?
- ☐ eine Zeichnung?

c) Die Ableitung hängt eng mit ***folgenden Begriffen*** zusammen:

- ☐ Stetigkeit
- ☒ Differenzierbarkeit
- ☒ Steigung
- ☐ Nullstelle der Funktion

d) Ist die Ableitung einer Funktion überall Null,
so ist die Funktion notwendigerweise

- ☐ eine Parabel.
- ☒ konstant.
- ☐ selbst auch Null.
- ☐ linear.

e) Eine Funktion ist nicht differenzierbar, wenn ihr Graph

- ☒ Sprungstellen hat.
- ☐ Teil einer Parabel ist.
- ☐ stetig ist.
- ☐ keine Knickstellen besitzt.

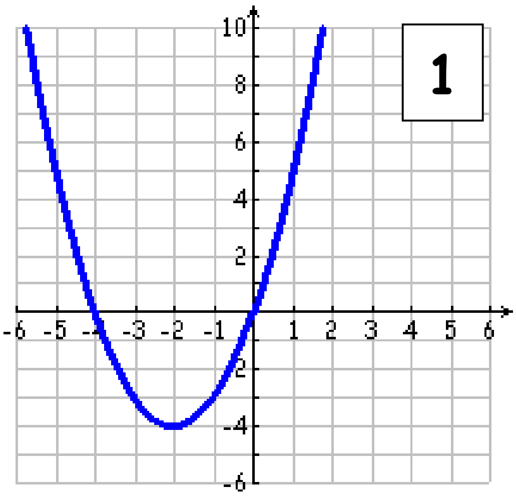
Lösung zu Aufgabe 8:

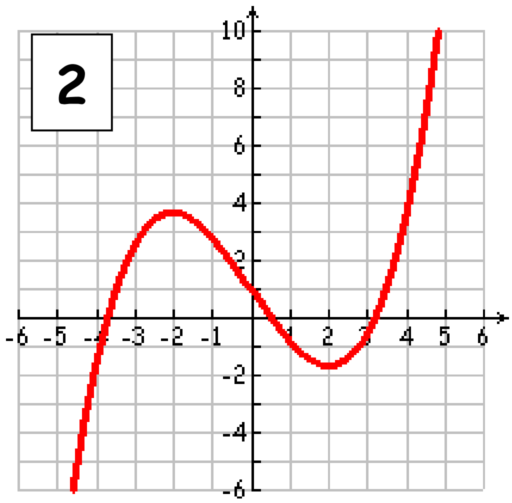
Funktionsgraph	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ableitungsgraph	**D**	**C**	**E**	**B**	**F**	**A**

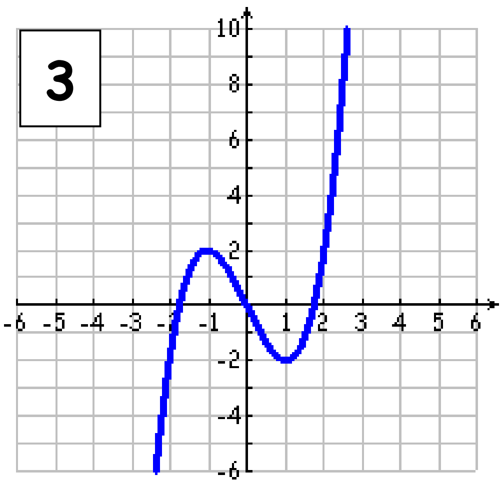
8.) Zuordnung

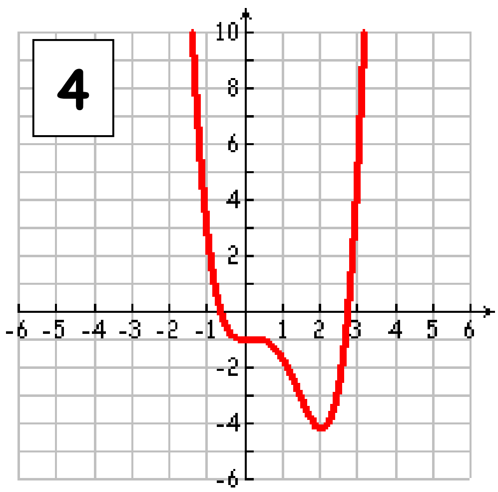
Ordnen Sie die Funktionsgraphen ihren Ableitungsgraphen.

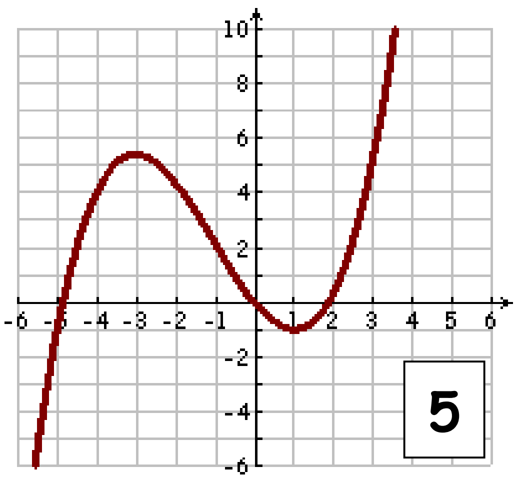
Funktionsgraphen

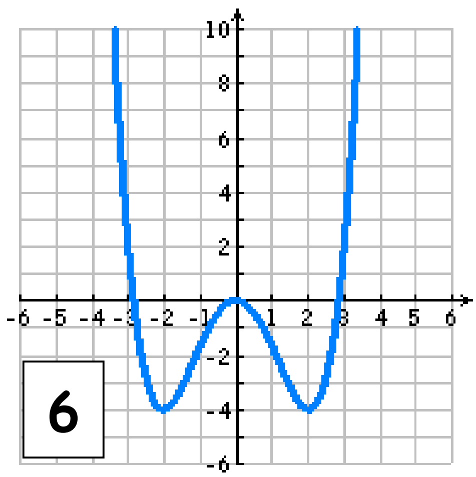












Ableitungsgraphen