Musterlösung **12. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 25.03.2009**

Klasse: DBOS 07 **Fach: Mathematik**

Themen: **Kurvendiskussion gebr.-rat. Fkt.; Produkt-, Quotienten- und Kettenregel**

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die zwei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften: **Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y**

a) $g(x) = \frac{4x-8}{x^2-9}$

Lösung:

$$Z\ddot{a}hler: \quad 4x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad [Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad x^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3 \quad und \quad x_2=-3 \quad [Polstellen\ mit\ VZW]$$

$$L\ddot{u}cke: \quad keine$$

$$Asymptote: Z\ddot{a}hlergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=0$$

$$S_y\left(0 \;\middle|\; \frac{8}{9}\right)$$

b) $f(x) = \frac{(2x-6)^2}{(2x+3)(x-3)}$

Lösung:

$$Z\ddot{a}hler: \quad (2x-6)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad [L\ddot{u}cke]$$

$$Nenner: \quad (2x+3)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{3}{2} \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_2=3 \quad [L\ddot{u}cke]$$

$$L\ddot{u}cke: \quad x=3$$

$$Asymptote: Z\ddot{a}hlergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=2$$

$$S_y(0 \mid -4)$$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt.

a) Pol an der Stelle x = 2, Nullstelle bei x = - 2 und eine Asymptote mit a(x) = 4.

Lösung: $f(x) = \frac{4(x+2)}{x-2}$

b) Pol an der Stelle x = - 3 und eine einfache Nullstelle bei x = 5.

Lösung: $$f(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

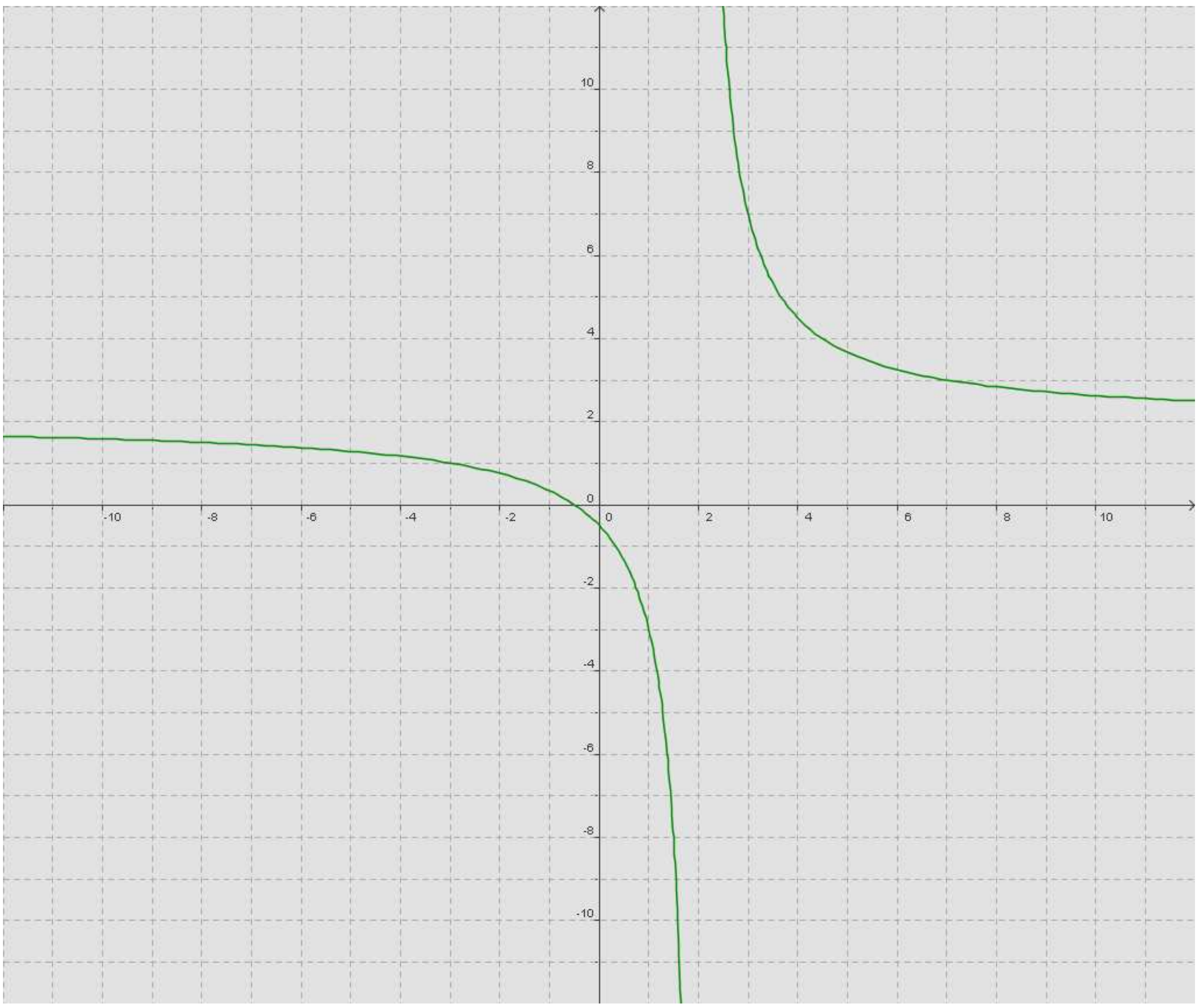
c) Pol an der Stelle x = - 1, behebbare Lücke bei x = 5, eine doppelte Nullstelle bei x = 2, Asymptote a(x) = 0,5
Zählergrad: n = 4

Lösung: $$f(x) = \frac{(x-2)^2(x-5)^2}{2(x-5)(x+1)^3}$$

3.) Zuordnung: Funktion - Graph

Gegeben seien drei Funktionsvorschriften f1 bis f3 und ein Graph.

$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4} \qquad f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4} \qquad f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$



a) Auf welche der drei Funktionsvorschriften passt der Graph?

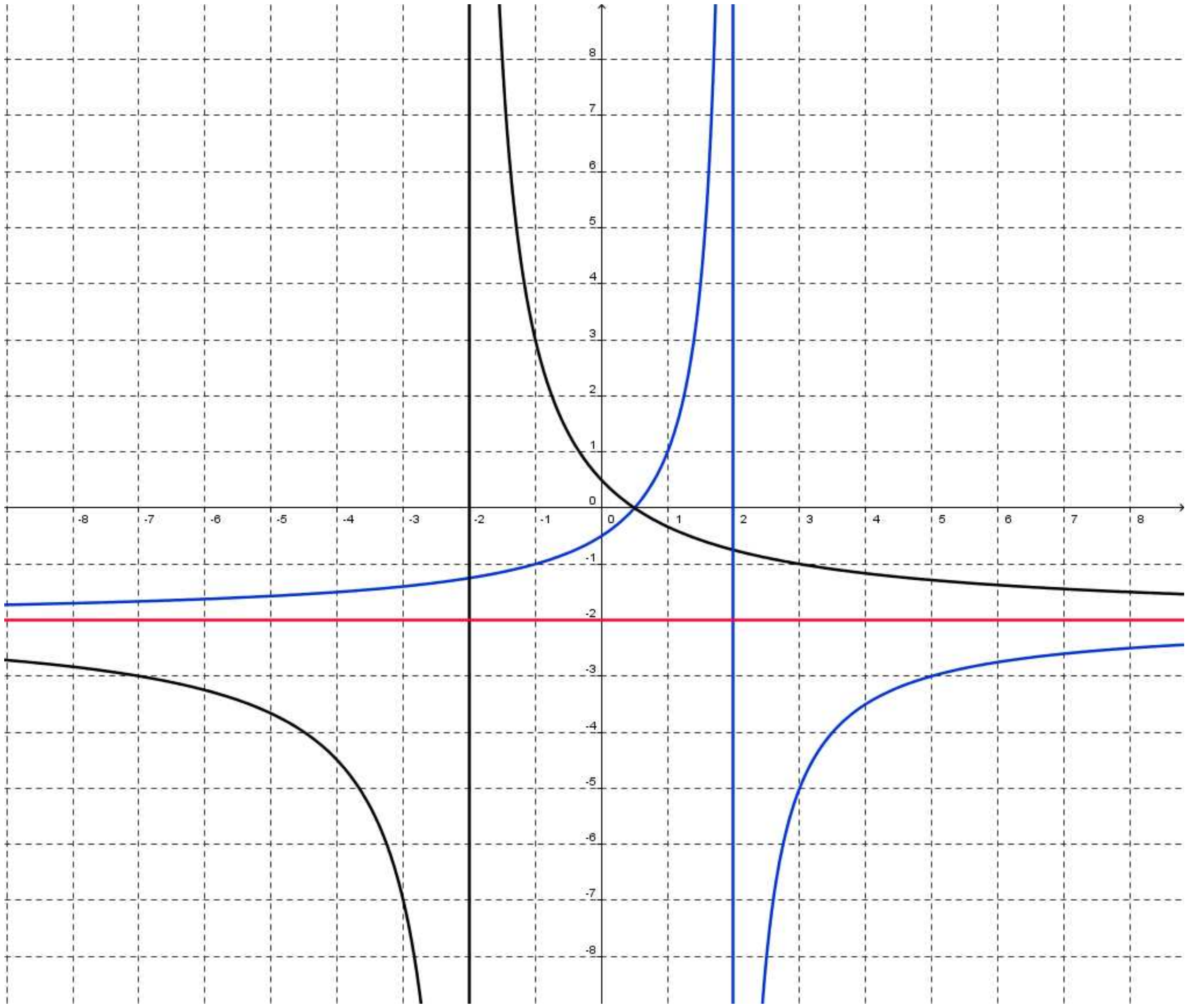
Lösung: *Die Funktionsvorschrift f2 passt auf den Graphen.*

Eigenschaften:
Nullstelle: x = - 0,5; Polstelle: x = 2; Asymptote: a(x) = 2

b) Zeichnen Sie die beiden anderen Funktionsvorschriften in das obige Koordinatensystem.

Begründen Sie die Zuordnung und die Zeichnung aufgrund der Nullstellen, der Asymptote und der und Polstellen!

Lösung:



$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4} \qquad f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$

Eigenschaften f1(x): Nullstelle: x = 0,5; ***Polstelle: x = 2****; Asymptote: a(x) = - 2*

Eigenschaften f2(x): Nullstelle: x = 0,5; ***Polstelle: x = - 2****; Asymptote: a(x) = - 2*

4.) Kurvendiskussion bei gebr.-rat. Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-4}$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Definitionsmenge

b) Nullstellen, Polstellen und Lücken

c) Asymptote

Lösung:

$$Zähler: \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad [doppelte\ Nullstelle]$$

$$Nenner: \quad x-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad [Polstelle\ mit\ VZW]$$

$$\Rightarrow \quad D = \Re \setminus \{4\}$$

$$Lücke: \quad keine$$

$$Asymptote: Polynomdivision \quad \Rightarrow \quad a(x) = x+2$$

d) Bilden Sie nun die erste Ableitung der Funktion und zeigen Sie, dass diese folgenden beide Ergebnisse annehmen kann:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-7)}{(x-4)^2} = 1 - \frac{9}{(x-4)^2}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-4} = \frac{x^2-2x+1}{x-4} \stackrel{Polynomdivision}{=} x+2+\frac{9}{x-4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\cdot(x-4)-(x-1)^2\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{(x-1)(2x-8-x+1)}{(x-4)^2} = \frac{(x-1)(x-7)}{(x-4)^2}$$

oder

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-4)^2}$$

e) Bilden Sie sodann die zweite Ableitung der Funktion und begründen Sie das folgende Ergebnis:

$$f''(x) = \frac{18}{(x-4)^3}$$

Lösung:

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-4)^2} = 1 - 9 \cdot (x-4)^{-2}$$

$$f''(x) = 0 + 18 \cdot (x-4)^{-3} = \frac{18}{(x-4)^3}$$

f) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion und welche Art von Extremum vorliegt.

Lösung:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-7)}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = 7$$

$$f''(1) = \frac{18}{(1-4)^3} = -\frac{18}{27} < 0 \Rightarrow Max(1 \mid 0)$$

$$f''(7) = \frac{18}{(7-4)^3} = \frac{18}{27} > 0 \Rightarrow Min(7 \mid 12)$$

g) Beweisen Sie, dass die Funktion keine Wendepunkte besitzt.

Lösung:

$$f''(x) = \frac{18}{(x-4)^3} = 0 \xrightarrow{\cdot (x-4)^3} 18 = 0 \quad Widerspruch!$$

h) Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle x = 10.

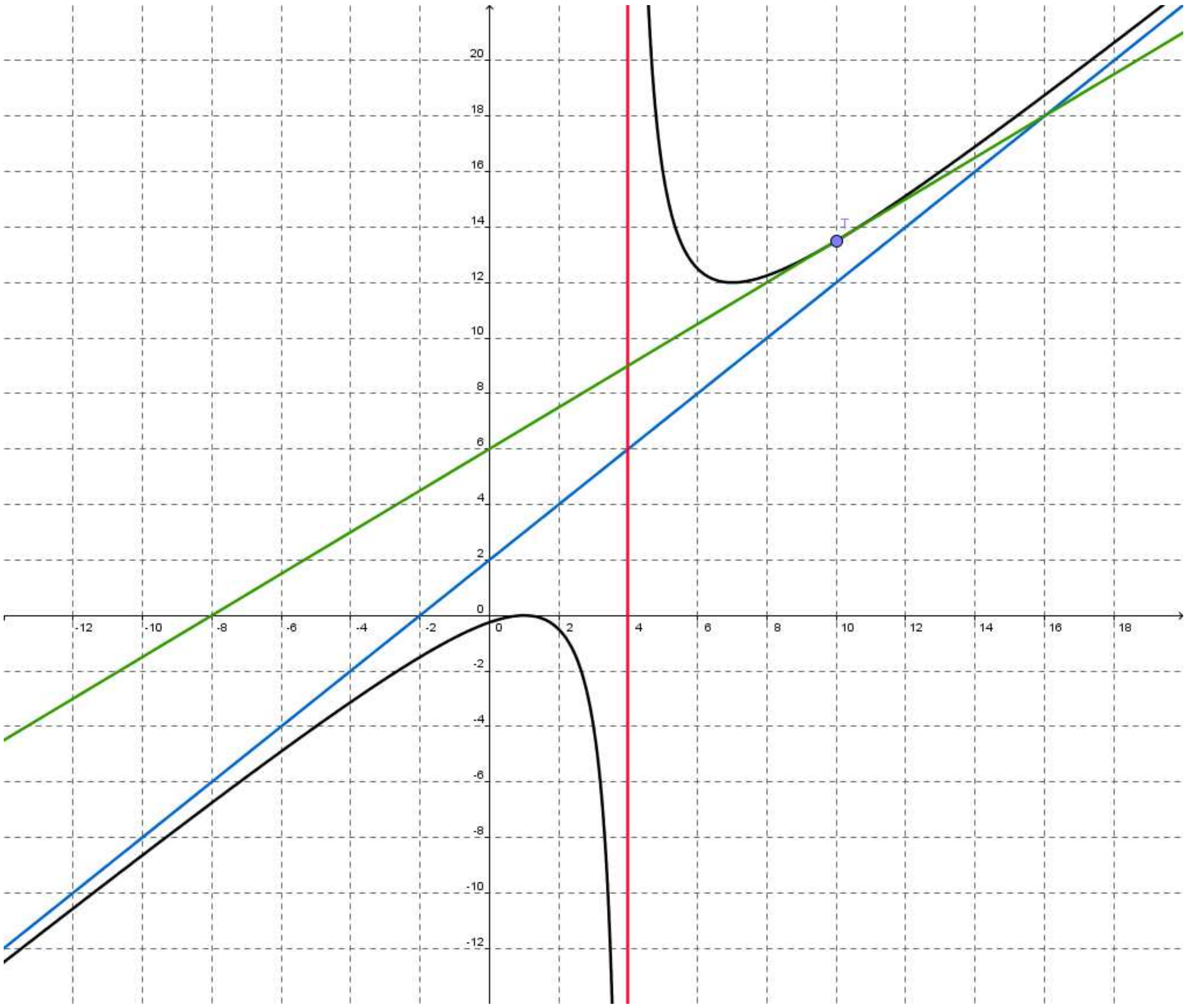
Lösung:

$$Funktionswert: \quad f(10) = \frac{81}{6} = \frac{27}{2} \qquad Steigung: \quad f'(10) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$y-Achsenabschnitt: \quad \frac{27}{2} = \frac{3}{4} \cdot 10 + b \Rightarrow b = 6$$

$$Tangente: \quad t(x) = \frac{3}{4}x + 6$$

i) Zeichnen Sie die Funktion und die Tangente auf der Basis Ihrer Ergebnisse.



Von den Aufgaben 5 – 7 sind entweder die Aufgabe 5 und 6 oder nur die Aufgabe 7 zu bearbeiten.Sie haben die Auswahl!

5.) Schnittpunkt: Gerade mit gebrochen-rationaler Funktion

Gegeben seien die Funktion $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

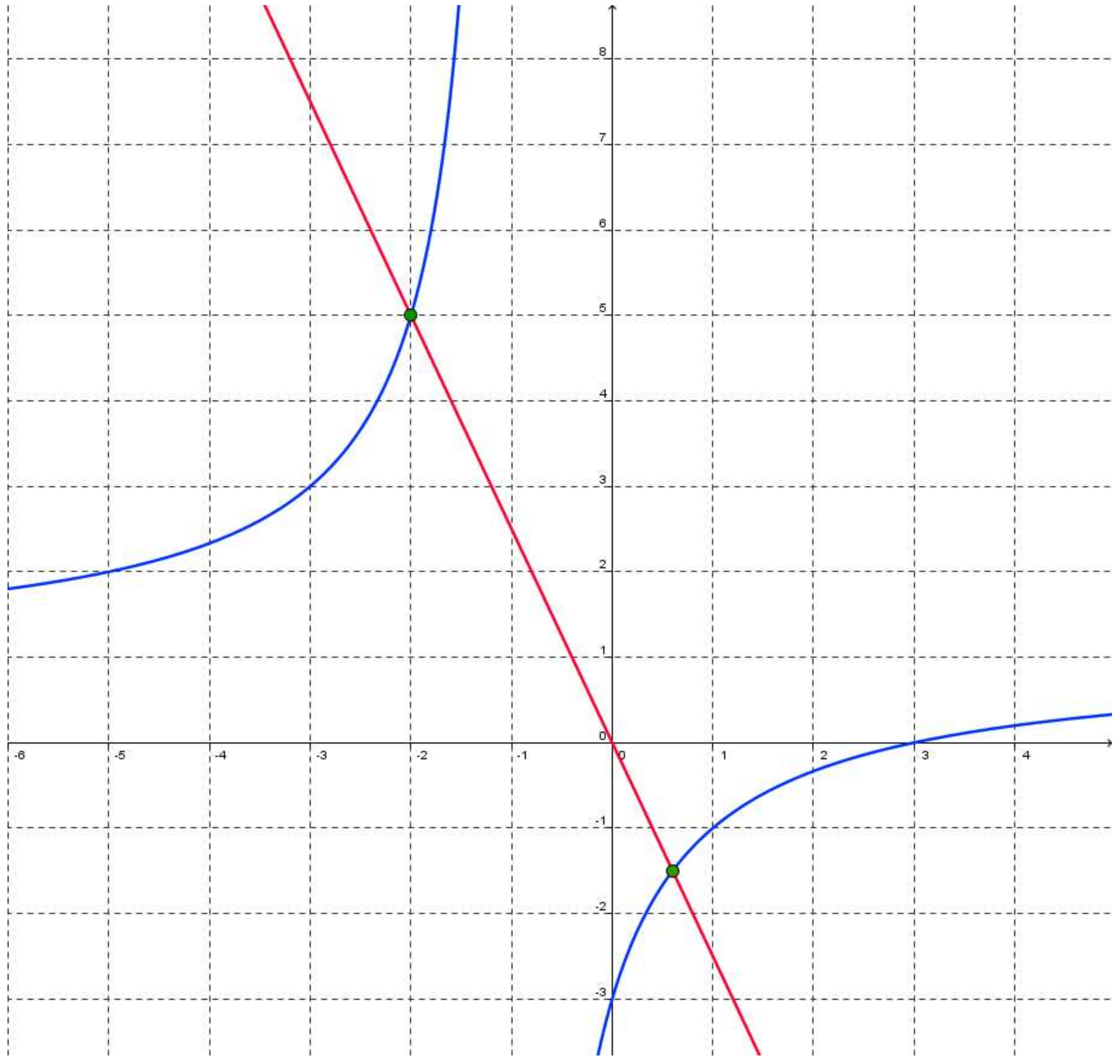
und eine Ursprungsgerade verläuft durch den Punkt $P\left(-2 \mid f(x)\right)$.

a) Bestimmen Sie die Geradengleichung.

Lösung:

$$f(-2) \quad = \quad \frac{-2-3}{-2+1} \quad = \quad 5 \quad \xrightarrow[b=0]{Ursprungsgerade} \quad g(x) \quad = \quad -\frac{5}{2}x$$

b) Zeichnen Sie nun die Funktion f(x) und die Gerade in ein Koordinatensystem.



c) In welchem Punkt schneidet die gesuchte Gerade die Funktion f(x) zum zweiten Mal?

Bestimmen Sie die Lösung mittels Rechnung!

Lösung:

$$\text{Schnittpunkte:} \quad f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = -\frac{5}{2}x$$

$$\xrightarrow{\cdot(x+1)} \quad x-3 = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \Rightarrow \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Lösungsformel}} \quad x_1 = -2 \quad und \quad x_2 = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{y\text{-Wert}} \quad g\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{3}{2} \Rightarrow S_2\left(\frac{3}{5}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right)$$

6.) Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \frac{tx^2 - tx - 1}{x}$ $\quad mit \ \ t \in \Re \setminus \{0\}$

Für welchen Wert von **t** besitzt die Funktion genau eine Nullstelle?

Anmerkung: Denken Sie an die Diskriminante!

Lösung: Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad D = t^2 - 4 \cdot t \cdot (-1) = t^2 + 4t$$

$$\text{=> eine Lösung}: \quad t^2 + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad t(t+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 0 \quad und \quad t+4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 0\,[nicht\ definiert!] \quad und \quad t = -4$$

7.) Ableitung von Funktionen

Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = (2x-3)^{10}$

Lösung: $f'(x) = 10 \cdot (2x-3)^9 \cdot 2 = 20 \cdot (2x-3)^9$

b) $f(x) = (4x^4 - 1)(2x^3 + 3x^2 - 5x + 1)$

Lösung: $f'(x) = 16x^3 \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) + (4x^4 - 1) \cdot (6x^2 + 6x - 5)$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^3 - x}$

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}x^3 - x}} \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - 1\right)$

d) $f(x) = (x^2 - 3)(3x-1)^2$

Lösung:

$$f'(x) = 2x \cdot (3x-1)^2 + 2 \cdot (x^2 - 3) \cdot (3x-1) \cdot 3$$

$$f'(x) = (3x-1) \cdot (12x^2 - 2x - 18)$$