Musterlösung Test GY 02 c vom 26.03.2004

Themen: Matrizen, Determinanten & Cramer-Regel

1.) Geben Sie je eine (4x4)-Matrix an, für deren Elemente a_{ij} gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i \geq j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) *Lösung:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Lösung:*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.) Vervollständigen Sie die Matrix mit den korrekten Zahlenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{22}+2 & a_{21}-a_{11} \\ a_{11}-a_{22} & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} a_{22}+2=-3+2 & a_{21}-a_{11} \\ a_{11}-a_{22} & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_{21}-a_{11} \\ a_{11}-a_{22}=-1-(-3) & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_{21}-a_{11} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_{21}-a_{11}=2-(-1) \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3.) Ein paar Fragen

a) Nennen Sie die Voraussetzung, die für zwei Matrizen gelten müssen, wenn sie miteinander **addiert** werden.

Lösung: Die beiden Matrizen müssen das gleiche Format haben.

b) Definieren Sie, wann zwei Matrizen gleich sind!

Lösung: Die beiden Matrizen müssen das gleiche Format haben und die Werte der Elemente der jeweiligen Positionen müssen identisch sein.

c) Worin liegt der Unterschied zwischen einer Diagonal- und einer Einheitsmatrix?

Lösung: Die Werte auf der Diagonalen bei der Einheitsmatrix müssen 1 sein, bei der Diagonalmatrix muss dies nicht der Fall sein.

4.) Beurteilen Sie die Aussagen, ob sie richtig (r) oder falsch (f) sind.

a) (0; 0; 0; 0) = 0 $\boxed{\mathbf{f}}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\mathbf{f}}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{(3;4)}$ $\boxed{\mathbf{f}}$

c) $\begin{pmatrix} 4-5+1 & 0 \\ 0 & -4a+(-2)^2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 \\ 0+0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\mathbf{r}}$

5.) Ein wenig zum Denken und Kombinieren :

Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus a) 5 b) k Elementen.

(i) Welches Format besitzt die Matrix? **a) 5 x 5** **b) k x k**

(ii) Wie viele Elemente hat die Matrix? **a) 25** **b) k^2**

(iii) Wie viele Elemente stehen unterhalb der Hauptdiagonalen?

a) $\dfrac{25-5}{2} = 10$ **b)** $\dfrac{k^2-k}{2}$

6.) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie für $1 \leq k \leq 3$ die Potenz A^k !

Lösung :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A \cdot A} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^2 \cdot A} A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Wie lautet die Matrix A^{10}?

Lösung :

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.024 \end{pmatrix}$$

c) Wie lautet die Potenz A^n für $n \in \mathbb{N}$?

Lösung :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

7.) Gegeben sind die Matrizen A, B und C.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie:

a) A - B * (- A + (-1) * B)

$$A - B \cdot (-A - B) =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[-\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 2 \\ -12 & 10 \end{pmatrix}$$

b) (A - 3 * C) * B

$$(A - 3C) \cdot B =$$

$$\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 1 & -58 \end{pmatrix}$$

8.) Berechnen sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$

Lösung :

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{vmatrix} - (-a) \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ -c & 1 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & c \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (1 + c^2) + a \cdot (a - bc) + b \cdot (ac + b) =$$

$$1 + c^2 + a^2 - abc + abc + b^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 20 & 16 \\ 25 & 9 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ *Lösung* : $Det(A) = 0 \quad wegen\ III = 4 \cdot I$

9.)

Behauptung : $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

Beweis :

$$-(-a) \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ -c & 0 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$a \cdot (0 - bc) + b \cdot (ac - 0) =$$

$$-abc + abc = 0$$

qed.

10.) Beweisen sie die zwei Determinantensätze

o.B.d.A. **mit Hilfe von allgemeinen Matrizen vom Format 2**.

a) Behauptung: Det (A^T) = Det (A)

Beweis:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow Det(A)=ad-cb$$

$$A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow Det(A^T)=ad-bc$$

Da für die Multiplikation in $\Re^1$ das Kommutativgesetz gilt, folgt:

$$\Rightarrow \quad cb \quad = \quad bc$$

$$\Rightarrow \quad Det(A) \quad = \quad Det(A^T)$$

$qed.$

b) Behauptung: k * A => k^n * Det (A)

Beweis:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow k\cdot A=k\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det(k\cdot A) &= k^2\cdot ad-k^2\cdot bc \\ &= k^2\cdot(ad-bc) \\ &= k^2\cdot Det(A) \end{aligned}$$

$qed.$

11.) Berechnen Sie folgende Ausdrücke :

a)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 2 \end{vmatrix}-2x &= -6 \\ 2-2x-2x &= -6 \\ -4x &= -8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$Det\left[\begin{pmatrix} 4x^2 & 2 \\ 8 & 0,5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,25 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right] = 21x^2$$

$$Det\begin{pmatrix} 4x^2 & 2 \\ 8 & 0,5 \end{pmatrix}\cdot Det\begin{pmatrix} 0,25 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 21x^2$$

$$(2x^2-16)\cdot(-1,5) = 21x^2$$

$$-3x^2-24 = 21x^2$$

$$|x| = 1$$

12.) Lösen Sie das LGS mit Hilfe der Cramer-Regel

$$I.) \quad x-3y = 4 \qquad und \qquad II.) \quad x-y = -2$$

Lösung :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4-6 = -10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-4 = -6$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+3 = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\Rightarrow y = \frac{-6}{2} = -3$$