Musterlösung: 12. Jgst. 5. Test **Datum: 24.05.2005**

Klasse: GY 03 c Fach: Mathematik (Leistungskurs)

Thema: LGS, Lösungskriterien und Determinanten

---

❶ Inverse einer Matrix

a) Bestimmen Sie die Inverse zu folgenden Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 0 & 4 & -4\\ 4 & 4 & -2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & -\frac{3}{40} & \frac{3}{20}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{7}{20} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}075 & 0{,}15\\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}2\\ -0{,}2 & -0{,}35 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

Rechenweg	4	-3	0	1	0	0
	0	4	-4	0	1	0
	4	4	-2	0	0	1
	1	- 3/4	0	1/4	0	0
	0	4	-4	0	1	0
	4	4	-2	0	0	1
	1	- 3/4	0	1/4	0	0
	0	4	-4	0	1	0
	0	7	-2	-1	0	1
	1	- 3/4	0	1/4	0	0
	0	1	-1	0	1/4	0
	0	7	-2	-1	0	1
	1	0	- 3/4	1/4	3/16	0
	0	1	-1	0	1/4	0
	0	0	5	-1	-1 3/4	1
	1	0	- 3/4	1/4	3/16	0
	0	1	-1	0	1/4	0
	0	0	1	- 1/5	- 7/20	1/5
	1	0	0	1/10	- 3/40	3/20
	0	1	0	- 1/5	- 1/10	1/5
	0	0	1	- 1/5	- 7/20	1/5

b) Prüfen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A)=1\cdot 3-5\cdot 4=-17$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(B)=0+48+0-0+16-0=64$$

c) Definieren Sie den Begriff „singulär“.

Unter singulär versteht man eine Matrix, die keine Inverse besitzt.

d) Für welche Werte von t ist die Matrix D regulär?

$$D_t=\begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 0 & t & -1 \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathit{ist\ regulär} \Leftrightarrow \det(D_t)\neq 0$$

$$\det(D_t)=t^2-t+0-2t^2+2t-0\overset{!}{=}0$$

$$-t^2+t=0 \quad \Rightarrow \quad t_1=0 \quad \wedge \quad t_2=1$$

$$\Rightarrow \quad D_t \ \mathit{regulär\ wenn}\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$$

❷ **Lineare Gleichungssysteme**

a) In einem Betrieb werden aus drei verschiedenen Einzelteilen E_1, E_2 und E_3 die Bauteile B_1, B_2 und B_3 nach folgender Stückliste hergestellt:

$$M_{eb}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie viele Bauteile müssen produziert werden, wenn das Lager mit 1627 Stück von E_1, 1018 Stück von E_2 und 508 Stück von E_3 geräumt werden soll?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1627 \\ 4 & 2 & 1 & 1018 \\ 2 & 0 & 1 & 508 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 130 \\ 125 \\ 248 \end{pmatrix}$$

b) Ermitteln Sie die eindeutige Lösung des folgenden LGS:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$
$$2x_2 + 4x_3 = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden LGS in Abhängigkeit von x_3:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$
$$2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-5 \\ -t+2 \\ t \end{pmatrix}$$

d) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt dieses LGS keine Lösung?

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$
$$2x_2 + 4x_3 = -2$$
$$3x_1 + 9x_2 - 2x_3 = t$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -2 & t \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-18 \end{array}\right) \Rightarrow t = 18$$

Das LGS ist nicht lösbar, wenn gilt: $t \in \mathbb{R} \setminus \{18\}$

e) Erläutern Sie das unterschiedliche Lösungsverhalten von LGS anhand des Rangkriteriums.

LGS besitzt genau eine eindeutige Lösung, wenn gilt: $Rg(A) = Rg(A \mid b) = n$

LGS besitzt keine Lösung, wenn gilt: $Rg(A) < Rg(A \mid b)$

LGS besitzt unendlich viele Lösungen, wenn gilt: $Rg(A) = Rg(A \mid b) < n$

f) Begründen Sie, warum folgendes LGS immer mind. eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Da der Ergebnisvektor der Nullvektor ist, kann der Fall $Rg(A) < Rg(A \mid b)$ **niemals eintreten; somit haben homogene LGS immer unendlich viele Lösungen oder die triviale Lösung (0 0 0).**

❸ **Determinante**

Bestimmen Sie den Determinantenwert folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & \pi & 12 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (6+4) = 60$$