Musterlösung **13. Jgst.** **2. Test** **Datum: 24.11.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Stochastik – Verteilungen, Erwartungswert, Varianz, Vollst. Induktion, Bin. Entwicklung**

---

❶ Entwicklung mittels dem binomischen Lehrsatz

Berechnen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

a) $(x-1)^5$

Lösung:

$$(x-1)^5$$
$$=\binom{5}{0}x^0\cdot(-1)^5+\binom{5}{1}x^1\cdot(-1)^4+\binom{5}{2}x^2\cdot(-1)^3$$
$$+\binom{5}{3}x^3\cdot(-1)^2+\binom{5}{4}x^4\cdot(-1)^1+\binom{5}{5}x^5\cdot(-1)^0$$
$$=(-1)^5+5x-10x^2+10x^3-5x^4+x^5$$

b) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)^4$

Lösung:

$$\left(2x+\frac{1}{3}\right)^4$$
$$=\binom{4}{0}(2x)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+\binom{4}{1}(2x)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{4}{2}(2x)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$+\binom{4}{3}(2x)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1+\binom{4}{4}(2x)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$=\frac{1}{81}+\frac{8}{27}x+\frac{24}{9}x^2+\frac{32}{3}x^3+16x^4$$

❷ Vollständige Induktion

Beweisen Sie die Aussagen mittels vollständiger Induktion:

a) $1+2+4+\ldots+2^{n-1} \quad = \quad 2^n-1$

Lösung:

I.A.: linke Seite: 1 rechte Seite: $2^1-1 \quad = \quad 1$

I.S.: $A(n) \quad \rightarrow \quad A(n+1)$

I.Schluss:

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1}+2^n \quad \overset{I.V.}{=} \quad 2^n-1+2^n$$

$$= \quad 2\cdot 2^n-1 \quad = \quad 2^{n+1}-1$$

b) $2^n \quad > \quad 2n+1 \qquad \textit{für } n \geq 3$

Lösung:

I.A.: linke Seite: $2^3 \quad = \quad 8$ rechte Seite: $2\cdot 3+1 \quad = \quad 7$

I.S.: $A(n) \quad \rightarrow \quad A(n+1)$

I.Schluss:

$$2^{n+1} \quad = \quad 2\cdot 2^n \quad \overset{I.V.}{>} \quad 2\cdot(2n+1) \quad = \quad 2n+2+2n$$

$$\overset{2n>1 \text{ wegen } n\geq 3}{>} \quad 2n+2+1 \quad = \quad 2(n+1)+1$$

❸ Binomialverteilte Zufallsvariablen

a) Ermitteln Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei n = 1200 und p = 0,6

Lösung:

$$\mu = n \cdot p \quad \rightarrow \quad \mu = 1.200 \cdot 0,6 = 720$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \quad \rightarrow \quad \sigma^2 = 1.200 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 288$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \quad \rightarrow \quad \sigma = \sqrt{1.200 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{288} = 16,97$$

b) Ermitteln Sie n und p bei μ = 20 und σ = 4.

Lösung:

$$\mu = n \cdot p \quad und \quad \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \xrightarrow{\mu\ eingesetzt} \sigma^2 = \mu \cdot q \quad \rightarrow \quad q = \frac{\sigma^2}{\mu}$$

$$q = \frac{16}{20} = 0,8 \quad \rightarrow \quad p = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$\mu = n \cdot p \quad \rightarrow \quad n = \frac{\mu}{p} \quad \rightarrow \quad n = \frac{20}{0,2} = 100$$

c) Eine Zufallsvariable ist $B_{50;\frac{5}{100}}$ - verteilt.

Bestimmen Sie alle Werte von X, die für k = 1 im Intervall $|X - \mu| \leq k \cdot \sigma$ liegen.

Lösung:

$$\mu = n \cdot p \quad \rightarrow \quad \mu = 50 \cdot \frac{5}{100} = 2,5$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \quad \rightarrow \quad \sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{100}} = 1,54$$

$$|X - 2,5| \leq 1,54 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0,96 \quad und \quad x_2 = 4,04 \quad \Rightarrow \quad X \in \{1; 2; 3; 4\}$$

❹ Erwartungswert

Bei Mäusen wurde in 100 Würfen zu je 4 Tieren jeweils die Anzahl k der weiblichen Tiere festgestellt.

k	0	1	2	3	4
n	7	32	33	24	4

a) Wie groß ist das arithmetische Mittel μ_k der Verteilung?

Lösung:

$$\mu_k = 0+1\cdot\frac{32}{100}+2\cdot\frac{33}{100}+3\cdot\frac{24}{100}+4\cdot\frac{4}{100} = 0+\frac{32}{100}+\frac{66}{100}+\frac{72}{100}+\frac{16}{100}$$

$$\mu_k = \frac{186}{100} = 1{,}86$$

b) X sei ZV für die Anzahl der weiblichen Tiere pro Wurf. Man kann annehmen, dass X eine $B_{4\,;\,p}$ - verteilte ZV ist.

Welchen Näherungswert für p erhält man, wenn $\mu_k = 1{,}6$ als Näherungswert für μ aufgefasst wird?

Lösung:

$$\mu = n\cdot p \quad und \quad p=\frac{\mu}{n} \quad \rightarrow \quad p=\frac{1{,}6}{4}=0{,}4$$

c) Berechnen die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungswerte für

$B_{4\,;\,0{,}475}$ und $k\in\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

Lösung:

Wert k	Wahrscheinlichkeit: $B_{0.475}$ (X = k)	Verteilung: $B_{0.475}$ (X <= k)
0	0.075969141	0.075969141
1	0.274935938	0.350905079
2	0.373127344	0.724032423
3	0.225060937	0.94909336
4	0.050906641	1

❺ Binomialverteilung I

Das Gutachterproblem

Zur Lösung eines schwierigen Mathematikproblems werden die Mathematiklehrer Anödel, Benödel, Cenödel und Denödel als Gutachter gehört.

Jeder löst das Problem unabhängig vom anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % richtig.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Lösung

(i) bei allen richtig?

Lösung:

$$B_{4\,;\,0{,}9}\left(X=4\right) \quad = \quad 0{,}9^4 \quad = \quad 0{,}6561$$

(ii) nur bei einem der Mathematiklehrer richtig?

Lösung:

$$B_{4\,;\,0{,}9}\left(X=1\right) \quad = \quad \binom{4}{1}0{,}9^1\cdot 0{,}1^3 \quad = \quad 0{,}0036 \quad = \quad 0{,}36\,[\%]$$

b) Wie viele Mathematiklehrer müsste man bei der gleichen Lösungssicherheit von 90 % mindestens befragen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,99 % wenigstens eine richtige Lösung bekommt?

Lösung:

$$B_{n\,;\,0{,}9}\left(X\geq 1\right) \quad = \quad 1-B_{n\,;\,0{,}9}\left(X=0\right) \quad \geq \quad 0{,}9999$$

$$1-\binom{n}{0}0{,}9^0\cdot 0{,}1^n \quad \geq \quad 0{,}9999 \quad \rightarrow \quad 0{,}1^n \quad \leq \quad 0{,}0001$$

$$\rightarrow \quad n\cdot\ln\left(0{,}1\right) \quad \leq \quad \ln\left(0{,}0001\right) \quad \rightarrow \quad n \quad \geq \quad \frac{\ln\left(0{,}0001\right)}{\ln\left(0{,}1\right)} \quad = \quad 4$$

❻ Binomialverteilung II

Hotelreservierungen bei ***„Petit Abris chez Jürgen"***

a) Anlässlich des Kongresses „Stochastik für hilflose Mathematiker" werden mit der Wahrscheinlichkeit 20 % der bestellten Bettenreservierungen storniert. Ein Hotel stellt 45 Betten zur Verfügung und nimmt 50 Reservierungen an.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit riskiert die Hotelleitung in Verlegenheit zu kommen?

<u>Lösung:</u>

$$B_{50\,;\,0{,}8}(X \geq 46) \quad = \quad 1 - B_{50\,;\,0{,}8}(X \leq 45) \quad = \quad 1 - (1 - 0{,}0185)$$

$$B_{50\,;\,0{,}8}(X \geq 46) \quad = \quad 0{,}0185 \quad = \quad 1{,}85\,[\%]$$

$$Alternative:$$

$$B_{50\,;\,0{,}2}(X \leq 4) \quad = \quad 0{,}0185 \quad = \quad 1{,}85\,[\%]$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Bettenreservierungen und einer vermuteten Stornierungsquote von 10 %, die tatsächliche Belegungszahl zwischen 40 und 45 liegt?

<u>Lösung:</u>

$$B_{50\,;\,0{,}9}(40 \leq X \leq 45) \quad = \quad B_{50\,;\,0{,}9}(X \leq 45) - B_{50\,;\,0{,}9}(X \leq 39)$$

$$B_{50\,;\,0{,}9}(40 \leq X \leq 45) \quad = \quad (1 - 0{,}4312) - (1 - 0{,}9906)$$

$$B_{50\,;\,0{,}9}(40 \leq X \leq 45) \quad = \quad 0{,}9906 - 0{,}4312$$

$$B_{50\,;\,0{,}9}(40 \leq X \leq 45) \quad = \quad 0{,}5594 \quad = \quad 55{,}94\,[\%]$$