Musterlösung **13. Jgst.** **3. Test** **Datum: 17.02.2006**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **LA:** **Materialverflechtung; Lineare Unabhängigkeit**
Analysis: **Exp.-/Gebr.-rat. Fkt.; Mac Laurin-Reihe**

---

❶ Lineare (Un-)Abhängigkeit

Gegeben sind die Matrix A_k und der Vektor $\vec{b}_k$ durch

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Determinante von A_k.

Lösung:

$$Det\left(A_k\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} 0+2k^2+6k-0+3k^2-4k^2$$

$$= k^2+6k = k\left(k+6\right)$$

b) Für welche Werte von k hat das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$

(i) keine Lösung?

(ii) genau eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$k=-6 \quad \Rightarrow \quad$ *keine Lösung*

$k=0 \quad \Rightarrow \quad$ *unendlich viele Lösungen*

$k \in \Re \setminus \{-6\,;0\} \quad \Rightarrow \quad$ *genau eine Lösung*

c) Bestimmen Sie die Lösung für $A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2 \quad \wedge \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

x_2 als freie Variable

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❷ Mac Laurin-Reihe

Bestimmen Sie die Potenzreihe an der Stelle x = 0 für die

Funktion $f(x) \;=\; \ln(x+1)$ bis zum 6. Reihenelement.

Lösung:

$$\textit{Ableitungen:}$$

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f^{i}(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f^{ii}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f^{iii}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f^{iv}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \qquad f^{v}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$\textit{Formel:}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \cdot f^{i}(0) \cdot x^i$$

$$f(x) = \frac{1}{0!} \cdot f^{0}(0) \cdot x^0 + \frac{1}{1!} \cdot f^{i}(0) \cdot x^1 + \frac{1}{2!} \cdot f^{ii}(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot f^{iii}(0) \cdot x^3$$

$$+ \frac{1}{4!} \cdot f^{iv}(0) \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot f^{v}(0) \cdot x^5$$

$$f(x) = 1\cdot\ln(1)\cdot x^0 + 1\cdot\frac{1}{1}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1}\cdot x^3$$
$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{-6}{1}\cdot x^4 + \frac{1}{120}\cdot\frac{24}{1}\cdot x^5$$

$$f(x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 = \sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}\cdot\frac{x^i}{i}$$

❸ Materialverflechtung und Kostenberechnung

Die Herstellung zweier Endprodukte verläuft über folgende Materialverflechtung:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2k & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 3k & k \end{pmatrix}$$

Die Kostenvektoren sind folgende:

$$\vec{k}_R = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{k}_E = \begin{pmatrix} 3k \\ k \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Matrix M_{RE}

<u>Lösung:</u>

$$M_{RZ}\cdot M_{ZE} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 2k & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 3k & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14k & 4k^2+4k \\ 15+3 & 11k \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Gesamtkosten für je 1 ME der Endprodukte, wenn die Fixkosten bei 150 GE liegen.

<u>Lösung:</u>

$$K_{\text{var}iabel}\left(k_{Rohstoffe}\right)=\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14k & 4k^2+4k\\15+3 & 11k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4k^2+18k\\26k+3\end{pmatrix}$$

$$K_{\text{var}iabel}\left(k_{Rohstoffe}\right)=4k^3+18k^2+52k+6$$

$$K_{\text{var}iabel}\left(k_{Zwischenprodukte}\right)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2k\\3k & k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2k+1\\4k\end{pmatrix}=14k+1$$

$$K_{\text{var}iabel}\left(k_{Endprodukte}\right)=\begin{pmatrix}3k\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=4k$$

$$Gesamtkosten:$$
$$GK\left(k\right)=4k^3+18k^2+70k+157$$

❹ Ortskurven und Schnittpunkte

Teil I:

Gegeben sei die Funktion $f_k\left(x\right) = \dfrac{e^x}{k-e^{2x}} \quad mit\ k\in\Re$

a) Zeigen Sie, dass die Stellen der Extrema bei $x=\ln\sqrt{-k}$ liegen.
Anmerkung: notwendige Bedingung genügt!!!

Lösung:

$$f_k{}'\left(x\right) = \frac{ke^x+e^{3x}}{\left(k-e^{2x}\right)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow\quad e^x\left(k+e^{2x}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad k+e^{2x}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2x}=-k$$

$$\Rightarrow\quad 2x=\ln\left(-k\right) \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}\ln\left(-k\right) \quad\Rightarrow\quad x=\ln\left(-k\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad x=\ln\sqrt{-k}$$

b) Für welche Werte $k \in \Re$ besitzt die Funktion Extremwerte?

Lösung: $k \in \Re^{-} \quad bzw. \quad k < 0$

c) Ermitteln Sie nun die Ortskurve der Extremwerte.

Lösung:

$$e^{2x} = -k \quad \Rightarrow \quad k = -e^{2x}$$

$$\xrightarrow{\text{einsetzen in } \mathrm{f_k}(x)} \quad y = \frac{e^x}{-e^{2x} - e^{2x}} \quad = \quad \frac{e^x}{-2\,e^{2x}} \quad = \quad \frac{-1}{2\,e^x}$$

d) Es sei die Ortskurve mit $y = -\dfrac{1}{2e^x}$ gegeben.
Bestimmen Sie hierzu die Extremwerte für x = 0 und für $f_k(x) = -1$

Lösung:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{-1}{2\,e^0} \quad = \quad -\frac{1}{2}$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 \quad = \quad \frac{-1}{2\,e^x} \quad \Rightarrow \quad 1 \quad = \quad \frac{1}{2\,e^x} \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad = \quad -\ln 2$$

Teil II:

Verändern Sie die Funktion nun zu $g_k(x) = \dfrac{e^x}{kx - e^{2x}} \quad mit\ k \in \Re$

und prüfen Sie, ob g(x) für verschiedene Werte von k Schnittpunkte besitzt.

Ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinatenwerte.

Lösung:

$$Vor.: \quad k_1 \neq k_2$$

$$g_{k_1}(x) = g_{k_2}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^x}{k_1 x - e^{2x}} = \frac{e^x}{k_2 x - e^{2x}} \quad \Rightarrow \quad k_2 x - e^{2x} = k_1 x - e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad k_2 x - k_1 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(k_2 - k_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

$$S(0 \mid -1)$$