

Musterlösung 13. Jgst. 1. Kursarbeit Datum: 27.10.2006

Klasse: GY 04 c Fach: Mathematik (Leistungsfach)

Themen: Mengen; Laplace; Kolmogorov; Bed. Wahrscheinlichkeit; Stoch. Unabhängigkeit; Bernoulli-Experimente und Binomialverteilung

1.) Stochastische Unabhängigkeit

Letzte Woche erschien in der Rheinpfalz folgender Artikel:

Die Gnade des frühen Erwachens

Frühaufsteher unter Jugendlichen haben einen Vorteil in der Schule

Jugendliche, die morgens gerne länger schlafen würden, haben es in der Schule schwerer als früh hellwache Altersgenossen. Auch ihre Abiturnoten sind offenbar schlechter als die der Frühaufsteher - mit weit reichenden Folgen. Die Ursache dafür ist noch nicht geklärt. [...]

Insgesamt wurden 1.000 Jugendliche befragt, von denen 290 Frühaufsteher waren; von den Langschläfern sagten 340 Personen, dass sie in der Schule einen Zeugnisdurchschnitt von schlechter als 2,5 hätten; die Gesamtzahl der Schüler mit einem Schnitt von 2,5 oder besser betrug 620.

- a) Bilden Sie eine vollständige Vierfeldertafel.

Lösung:

	$\leq 2,5$	$> 2,5$	\sum
F	250	40	290
\overline{F}	370	340	710
\sum	620	380	1.000

- b) Prüfen Sie, mittels stochastischer (Un-)Abhängigkeit, ob die Überschrift des Artikels den Sachverhalt korrekt beschreibt.

Lösung:

Frage: Sind F und $\leq 2,5$ stochastisch abhängig?

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(F) \cdot P(" \leq 2,5") &= P(F \cap " \leq 2,5") \\ \Rightarrow P(F) \cdot P(" \leq 2,5") &= \frac{290}{1.000} \cdot \frac{620}{1.000} = 0,1798 \\ \Rightarrow P(F \cap " \leq 2,5") &= \frac{250}{1.000} = 0,25 \neq 0,1798 \\ \Rightarrow &\text{stochastisch abhängig}\end{aligned}$$

- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person
- (i) $\leq 2,5$ und Langschläfer ist?
 - (ii) Langschläfer oder schlechter als 2,5 ist?
 - (iii) Frühaufsteher, aber schlechter als 2,5 ist?

Lösung:

$$\begin{aligned}(i) \quad P(\overline{F} \cap " \leq 2,5") &= \frac{370}{1.000} = 0,37 \\ (ii) \quad P(\overline{F} \cup " > 2,5") &= P(\overline{F}) + P(" > 2,5") - P(\overline{F} \cap " > 2,5") \\ \Rightarrow P(\overline{F} \cup " > 2,5") &= 0,71 + 0,38 - 0,34 = 0,75 \\ (iii) \quad P(F \cap " > 2,5") &= \frac{40}{1.000} = 0,04\end{aligned}$$

2.) Zufallsexperimente und Ergebnismenge

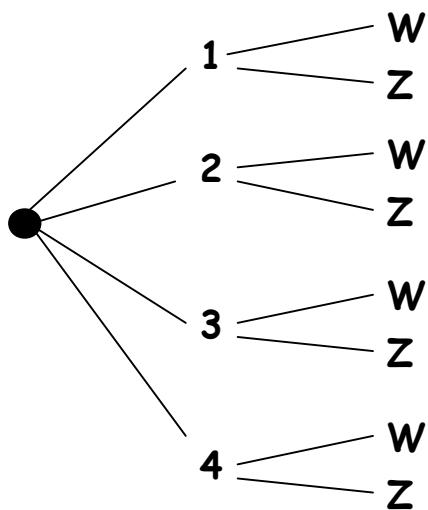
Ein Tetraeder und eine Münze werden gleichzeitig geworfen.

Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm und nennen Sie die Ergebnismenge.

Lösung:

$$\Omega = \left\{ (1 \mid W); (1 \mid Z); (2 \mid W); (2 \mid Z); \right. \\ \left. (3 \mid W); (3 \mid Z); (4 \mid W); (4 \mid Z) \right\}$$

Baumdiagramm:



Auch in umgekehrter Anordnung möglich!

3.) Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit

Ein Würfel wird zweimal geworfen.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
 - (i) das Produkt der Augenzahlen 12 beträgt?
 - (ii) der Quotient aus der ersten und zweiten Augenzahl eine natürliche Zahl ist.
- b) Nach welcher Definition der Wahrscheinlichkeit gehen Sie hier vor? Begründen Sie dabei Ihre Ergebnisse.

Lösung:

$$\Omega = \{(1|1); \dots; (6|6)\} \Rightarrow 36 \text{ Möglichkeiten}$$

$$(i) A = \{(2|6); (6|2); (3|4); (4|3)\} \Rightarrow 4 \text{ Möglichkeiten}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,1111$$

$$(ii) B = \left\{ \begin{array}{l} (1|1); (2|1); (3|1); (4|1); (5|1); (6|1); (2|2); \\ (4|2); (6|2); (3|3); (6|3); (4|4); (5|5); (6|6) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 14 \text{ Möglichkeiten} \Rightarrow P(B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = 0,3888$$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$

4.) Verknüpfung von Ereignissen

Ein Würfel wird einmal geworfen.

$A = \{ \text{„die Augenzahl ist kleiner als } 3\text{“} \}$ und $B = \{ \text{„die Augenzahl ist ungerade“} \}$

Seien die beiden Ereignisse.

Ermitteln Sie nun die folgenden verknüpften Ereignisse:

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $A \cap B$ | b) $A \cup B$ | c) $A \cap \overline{B}$ |
| d) $\overline{A \cap B}$ | e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ | f) $\overline{\overline{A \cup B}}$ |

Lösung:

$$A = \{1; 2\} \quad \overline{A} = \{3; 4; 5; 6\} \quad B = \{1; 3; 5\} \quad \overline{B} = \{2; 4; 6\}$$

$$\begin{array}{lll} A \cap B = \{1\} & A \cup B = \{1; 2; 3; 5\} & A \cap \overline{B} = \{2\} \\ \overline{A \cap B} = \{2; 3; 4; 5; 6\} & \overline{A} \cup \overline{B} = \{2; 3; 4; 5; 6\} & \overline{\overline{A \cup B}} = \{3; 5\} \end{array}$$

5.) Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten I

Gegeben sei eine Ergebnismenge: $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$

Berechnen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(1)$ wenn gilt: $P(2) = \frac{1}{2}; P(3) = \frac{1}{4}; P(4) = \frac{1}{12}$

Lösung:

$$P(1) = 1 - P(2) - P(3) - P(4) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

b) $P(1)$ und $P(2)$ wenn gilt: $P(3) = \frac{1}{5}; P(4) = \frac{1}{8}; P(1) = 2 \cdot P(2)$

Lösung:

$$P(1) + P(2) = 1 - P(3) - P(4) \Rightarrow 2 \cdot P(2) + P(2) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot P(2) = \frac{27}{40} \xrightarrow{:3} P(2) = \frac{9}{40} \xrightarrow{P(1)=2 \cdot P(2)} P(1) = \frac{9}{20}$$

c) $P(1)$ wenn gilt: $P(2;3)=\frac{2}{3}; P(3;4)=\frac{3}{4}; P(2)=\frac{P(2;3)}{4}$

Lösung:

$$P(2) = \frac{P(2;3)}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(3) = P(2;3) - P(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(4) = P(3;4) - P(3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(1) = 1 - P(2) - P(3) - P(4) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

6.) Ergebnismengen und (bedingte) Wahrscheinlichkeiten II

Für zwei Ereignisse A und B gelten folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{7}{16}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Berechnen Sie hieraus die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- | | | |
|------------------|----------------------|--|
| a) $P(A \cup B)$ | b) $P(\overline{A})$ | c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ |
| d) $P_A(B)$ | e) $P_{A \cap B}(A)$ | |

Lösung:

$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{7}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$$

$$b) P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$c) P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$d) P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{7} = \frac{2}{7}$$

$$e) \quad P_{A \cap B}(A) = \frac{P(A \cap B \cap A)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} \Rightarrow 1$$

7.) Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten III

a) Begründen Sie, weshalb folgende Ungleichung gilt:

$$A, B \subseteq \Omega: \quad P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Lösung:

es gilt für $A, B \subseteq \Omega$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

da $P(A \cap B) \geq 0$ folgt:

Entfernen des Subtrahenden ≥ 0 von der rechten Seite,
vergrößert den Wert der rechten Seite:

$$\Rightarrow \text{Behauptung: } P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

b) Vervollständigen Sie folgende Gleichung und begründen Sie Ihre Lösung:

$$A, B, C \subseteq \Omega: \quad P(A \cup B \cup C) = ?$$

Lösung:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Beweis:

$$P(A \cup B \cup C) \underset{\text{Subst: } X = A \cup B}{=} P(X \cup C)$$

$$\Rightarrow P(X \cup C) = P(X) + P(C) - P(X \cap C)$$

$$\underset{\text{Re-Subst}}{\Rightarrow} P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - \{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - \{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

\Rightarrow Behauptung

8.) Mengenlehre

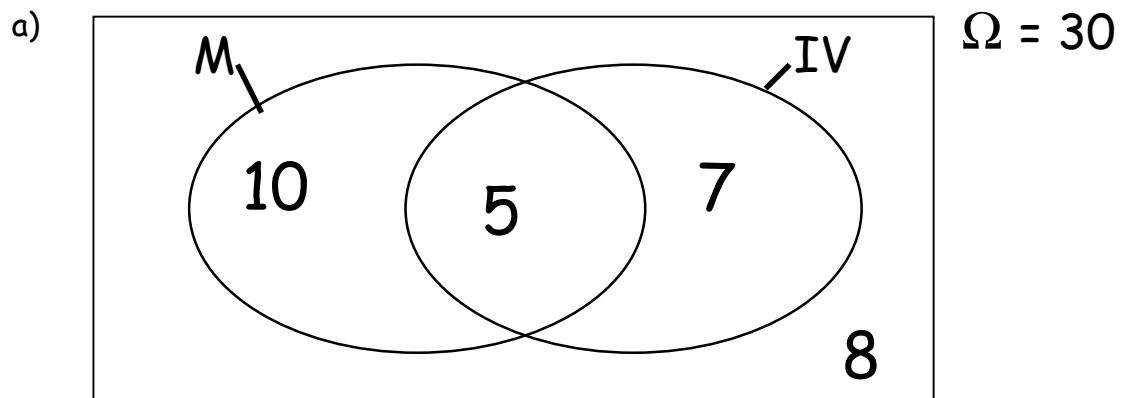
Von den 30 Schülern einer Klasse 12 nehmen 15 am LK Mathematik, 12 am LK IV und 8 an keinem der beiden Leistungskurse teil.

- a) Bilden Sie eine Mengenübersicht (Venn-Diagramm).

Ein Schüler wird zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

- b) Mathematik und IV gewählt hat?
c) Mathematik oder IV gewählt hat?

Lösung:



b) $P(M \cap IV) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

c) $P(M \cup IV) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

9.) Wahrscheinlichkeiten

Problem I:

Paul möchte sein Auto starten. Ihm ist bekannt, dass die Batterie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 in Ordnung ist und dass die Zündkerzen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 funktionieren.

Er weiß, dass sein Auto genau dann anspringt, wenn die Batterie und mind. drei von vier Zündkerzen funktionieren. Alle Ereignisse sind paarweise unabhängig.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein Auto anspringt?

Lösung:

$$P(\text{"Start"}) = 0,5 \cdot \left[\binom{4}{3} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 \right]$$

$$P(\text{"Start"}) = 0,5 \cdot 2 \cdot 0,8^4 = 0,8^4 = 0,4096$$

Problem II:

Drei Kinder werfen auf ein Ziel. Sie treffen dieses unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$ und $\frac{4}{5}$. Jeder wirft einmal.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird

- a) das Ziel getroffen? b) das Ziel genau zweimal getroffen?

Lösung:

$$a) P(\text{"Treffer"}) = 1 - P(\text{"kein Treffer"})$$

$$P(\text{"Treffer"}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{122}{125} = 0,976$$

$$b) P(\text{"2 Treffer"}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5}$$

$$P(\text{"2 Treffer"}) = \frac{21}{250} + \frac{36}{250} + \frac{56}{250} = \frac{113}{250} = 0,452$$

10.) Beweisen Sie folgende beiden Behauptungen

Für die Ereignisse A und B mit $P(A) \neq 0$ bzw. $P(B) \neq 0$ gilt:

$$\text{a)} \quad P_A(A \cap B) = P_A(B)$$

Lösung:

$$\text{Beh.: } P_A(A \cap B) = P_A(B)$$

Beweisführung:

$$\begin{aligned} P_A(A \cap B) &= \frac{P[A \cap (A \cap B)]}{P(A)} && \text{Formel einsetzen} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} && \text{A} \cap (\text{A} \cap \text{B}) = (\text{A} \cap \text{B}) \\ &= P_A(B) && \text{Formel benutzen} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad P_A(A \cup B) = 1$$

Lösung:

$$\text{Beh.: } P_A(A \cup B) = 1$$

Beweisführung:

$$\begin{aligned} P_A(A \cup B) &= \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A)} && \text{Formel einsetzen} \\ &= \frac{P(A)}{P(A)} && A \cap (A \cup B) = A \\ &= 1 && \end{aligned}$$

11.) (Bedingte) Wahrscheinlichkeit

Bei einem Multiple-Choice-Test werden einem unvorbereiteten Prüfling zu einer vorgegebenen Frage 5 mögliche Antworten gegeben, von denen er die **beiden** richtigen ankreuzen soll.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die beiden richtigen Antworten ankreuzen wird, wenn er rät?

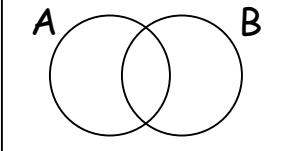
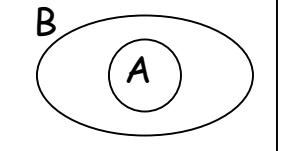
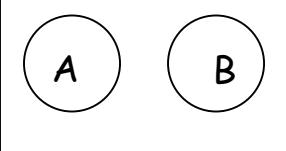
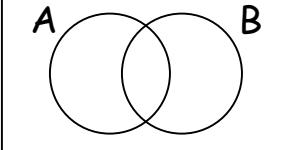
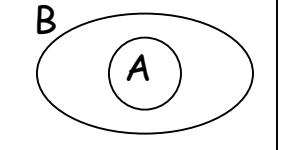
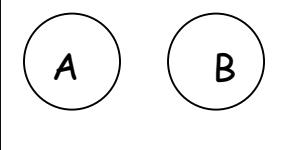
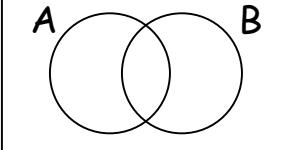
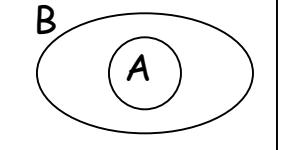
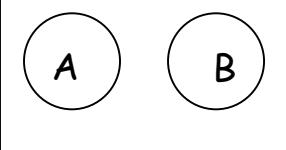
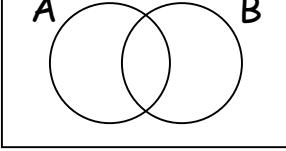
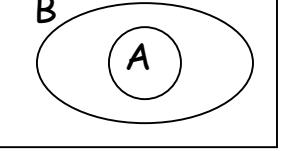
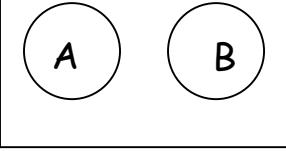
Lösung: $P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die beiden richtigen Antworten ankreuzen wird, wenn er erfährt, dass die erste Antwort nicht richtig ist?

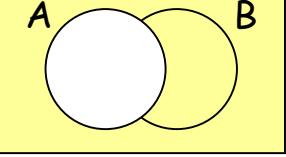
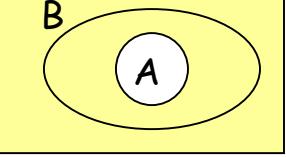
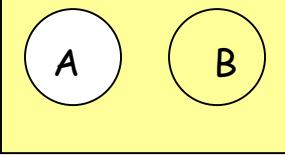
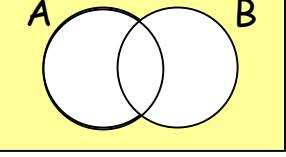
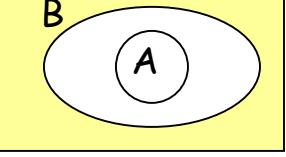
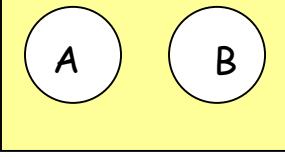
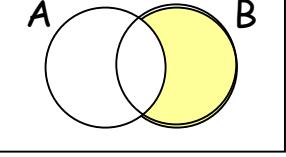
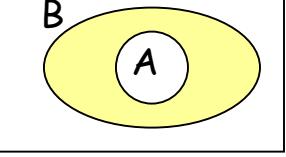
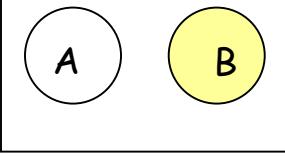
Lösung: $P_{\text{"A1 ist falsch"}}(X = 2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

12.) Ereignisse in Venn-Diagrammen

Schraffieren Sie jeweils in den folgenden drei Diagrammen die Ereignisse bzw. benennen Sie das Ereignis:

\overline{A}			
$\overline{A} \cap \overline{B}$			
$\overline{A} \cap B$			
$B \setminus (A \cap B)$			

Lösung:

\overline{A}			
$\overline{A} \cap \overline{B}$			
$\overline{A} \cap B$ =			
$B \setminus (A \cap B)$			

13.) Kolmogorov und Zufallsvariablen

In einem Zufallsexperiment gebe die ZV X die Anzahl der Treffer an.
Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	1	2	3	4	sonst
$P(X = k)$	a	$2a$	$5a - 0,15$	$a + 0,15$	0,06	$0,4a$

- a) Bestimmen Sie a so, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.
- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für mind. zwei Treffer an.

Lösung:

$$a + 2a + 5a - 0,15 + a + 0,15 + 0,06 + 0,4a = 1$$

$$\Rightarrow 9,4a = 0,94 \Rightarrow a = 0,1$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,1 - 0,2 = 0,7$$

14.) Binomialverteilung

Problem I:

Von einer Ladung Apfelsinen sind 10 % verdorben. Es werden 5 Stück entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) eine Orange verdorben ist.
- b) alle Orangen in Ordnung sind.
- c) mindestens vier Orangen verdorben sind.

Lösung:

$$a) \quad B(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,32805$$

$$b) \quad B(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 = 0,59049$$

$$\begin{aligned} c) \quad B(X \geq 4) &= B(X=4) + B(X=5) \\ B(X \geq 4) &= \binom{5}{4} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^0 \\ B(X \geq 4) &= 0,00045 + 0,00001 \\ B(X \geq 4) &= 0,00046 = 0,046 [\%] \end{aligned}$$

Problem II:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen folgende Werte:

- a) $B_{50;0,3}(X \leq 20)$
- b) $B_{50;0,1}(X > 5)$
- c) $B_{50;0,8}(X \leq 40)$
- d) $B_{50;0,95}(X \geq 47)$
- e) $B_{100;0,2}(15 \leq X \leq 25)$
- f) $B_{50;0,5}(21 < X \leq 26)$

Lösung:

$$a) \quad B_{50;0,3}(X \leq 20) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0,9522$$

$$b) \quad B_{50;0,1}(X > 5) = 1 - B_{50;0,1}(X \leq 5) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 1 - 0,6161 = 0,3839$$

$$c) \quad B_{50;0,8}(X \leq 40) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 1 - 0,4437 = 0,5563$$

$$d) \quad B_{50;0,95}(X \geq 47) = 1 - B_{50;0,95}(X \leq 46)$$

$$B_{50;0,95}(X \geq 47) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 1 - (1 - 0,7604) = 0,7604$$

$$e) \quad B_{100;0,2}(15 \leq X \leq 25) = B_{100;0,2}(X \leq 25) - B_{100;0,2}(X \leq 14)$$

$$B_{100;0,2}(15 \leq X \leq 25) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0,9125 - 0,0804 = 0,8321$$

$$f) \quad B_{50;0,5}(21 < X \leq 26) = B_{50;0,5}(X \leq 26) - B_{50;0,5}(X \leq 21)$$

$$B_{50;0,5}(21 < X \leq 26) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0,6641 - 0,1611 = 0,5030$$

Problem III:

Eine Firma liefert lackierte Holzteile, von denen 5 % Lackfehler aufweisen.

Aus einer großen Lieferung werden 100 solche Artikel (mit Zurücklegen) überprüft.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben

a) weniger als zehn einen Lackfehler?

b) mehr als sechs einen Lackfehler?

c) mind. drei und höchstens acht einen Lackfehler?

Lösung:

$$a) \quad B_{100;0,05}(X \leq 9) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0,9718$$

$$b) \quad B_{100;0,05}(X > 6) = 1 - B_{100;0,05}(X \leq 6) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 1 - 0,766 = 0,234$$

$$c) \quad B_{100;0,05}(3 \leq X \leq 8) = B_{100;0,05}(X \leq 8) - B_{100;0,05}(X \leq 2)$$

$$B_{100;0,05}(3 \leq X \leq 8) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0,9369 - 0,1183 = 0,8186$$