Musterlösung **13. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 15.12.2006**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Themen: **Binomialverteilung; Hypergeometr. Verteilung; Normalverteilung; Totale Wahrscheinlichkeit; Satz von Bayes**

1.) Hypergeometrische Verteilung und Bernoullikette

Losbriefe enthalten 10 Lose, darunter genau drei Gewinnscheine. Wer einen Losbrief kauft, entnimmt dem Brief vier Lose. Ein Gewinn wird ausbezahlt, wenn sich unter den vier entnommenen Losen mind. ein Gewinnschein befindet.

a) X=k gebe die Anzahl der gezogenen Gewinnscheine an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X=k; erstellen Sie hierzu eine Tabelle mit den Werten der Wahrscheinlichkeiten und mit den summarischen Wahrscheinlichkeiten als Verteilung.

Lösung:

X = k	**0**	**1**	**2**	**3**
$H(X=k)$	$\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$	$\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$
$H(X\le k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{58}{60}$	$\frac{60}{60}=1$

Bitte gehen Sie unabhängig von Ihrem Ergebnis in a) von folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)
0,15	0,45	0,35	0,05

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

Lösung: $\mu = 0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}45+2\cdot 0{,}35+3\cdot 0{,}05 = 1{,}3$

$$\sigma^2 = (1{,}3-0)^2\cdot 0{,}15+(1{,}3-1)^2\cdot 0{,}45+(1{,}3-2)^2\cdot 0{,}35+(1{,}3-3)^2\cdot 0{,}05$$

$$\sigma^2 = 1{,}69\cdot 0{,}15+0{,}09\cdot 0{,}45+0{,}49\cdot 0{,}35+2{,}89\cdot 0{,}05 = 0{,}61$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}61} = 0{,}78$$

c) Wie hoch müsste der Preis für einen Losbrief sein, damit es sich um eine faire Verlosung handelt, wenn man davon ausgeht, dass pro gezogenem Gewinnschein 5,00 € ausgezahlt werden?

Lösung:

X = k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,15	0,45	0,35	0,05
AZ	0	5	10	15

$$0 = (0-x)\cdot 0{,}15+(5-x)\cdot 0{,}45+(10-x)\cdot 0{,}35+(15-x)\cdot 0{,}05$$
$$0 = -0{,}15x+2{,}25-0{,}45x+3{,}5-0{,}35x+0{,}75-0{,}05x$$
$$0 = 6{,}5-x \Rightarrow x = 6{,}5$$

d) Wie viele Briefe müssen mindestens gekauft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mind. einmal alle drei Gewinnscheine gezogen werden?

Lösung:

$$B(X\geq 1) \geq 0{,}8$$
$$\Rightarrow 1-B_{n\,;\,0{,}05}(X=0) \geq 0{,}8$$
$$\Rightarrow \binom{n}{0}0{,}05^0\cdot 0{,}95^n \leq 0{,}2$$
$$\Rightarrow n\cdot\ln(0{,}95) \leq \ln(0{,}2)$$
$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}95)} = 31{,}377 \Rightarrow n \geq 32$$

2.) Grundlagen der Normalverteilung

Die stetige Zufallsvariable X sei normalverteilt nach $N(\mu\,;\sigma)$.

a) X ist $N(0\,;0{,}1)$-verteilt. Berechnen Sie $P(X\leq\sigma)$.

Lösung:

$$P(X\leq\sigma) \Rightarrow P(X\leq 0{,}1) = \Phi(1) = 0{,}84134$$
$$NR.:\quad x = \frac{0{,}1-0}{0{,}1} = 1$$

b) X ist $N(20\,;2)$-verteilt. Berechnen Sie $P(17 \le X \le 22)$.

Lösung:

$$P(17 \le X \le 22) \;=\; \Phi(1)-\Phi(-1,5) \;=\; 0,84134-0,06681 \;=\; 0,77453$$

$$NR.: \quad x_1 \;=\; \frac{22-20}{2} \;=\; 1 \quad und \quad x_2 \;=\; \frac{17-20}{2} \;=\; -1,5$$

c) X ist $N(15\,;3)$-verteilt. Berechnen Sie $P(|X-\mu| \ge \sigma+1)$.

Lösung:

$$P(|X-\mu| \ge \sigma+1) \;\Rightarrow\; P(|X-15| \ge 4) \;=\; 1-P(|X-15|<4) \;=\; 1-P(11<X<19)$$

$$1-P(11<X<19) \;=\; 1-\left[2\cdot\Phi(1,33)-1\right] \;=\; 1-0,81648 \;=\; 0,18352$$

$$NR.: \quad x \;=\; \frac{19-15}{3} \;=\; \frac{4}{3} \;=\; 1,33 \quad (symmetrisches\ Intervall)$$

d) X ist $N(300\,;10)$-verteilt.
Berechnen Sie den Wert für c und die Werte für k_1 und k_2,
damit gilt: $P(|X-\mu| \le c) \ge 0,9$.

Lösung:

$$P(|X-\mu| \le c) \ge 0,9 \;\Rightarrow\; P(|X-300| \le c) \;\ge\; 0,9 \quad (symmetrisches\ Intervall)$$

$$\xrightarrow[Intervall]{symmetrisches} \; 0,9 \;=\; 2\cdot\Phi(x)-1 \;\Rightarrow\; \Phi(x) \;=\; 0,95 \;\Rightarrow\; x \;=\; 1,65$$

$$\Rightarrow\; 1,65 \;=\; \frac{300+c-300}{10} \;\Rightarrow\; c \;=\; 10\cdot 1,65 \;\Rightarrow\; c \;=\; 16,5$$

e) X ist $N(\mu\,;0,3)$-verteilt.
Berechnen Sie μ damit gilt: $P(X \le 4) = 0,7$.

Lösung:

$$P(X \le 4) = 0,7 \;\Rightarrow\; \Phi(x) \;=\; 0,7 \;\Rightarrow\; x \;=\; 0,53$$

$$\Rightarrow\; x \;=\; \frac{4-\mu}{0,3} \;=\; 0,53 \;\xrightarrow{\cdot\,0,3}\; 4-\mu \;=\; 0,159 \;\Rightarrow\; \mu \;=\; 3,841$$

f) X ist $N(40\,;\sigma)$-verteilt.

Berechnen Sie σ damit gilt: $P(|X-40|\le 3)=0{,}9$.

Lösung:

$$P(|X-40|\le 3)=0{,}9 \xrightarrow[\text{Intervall}]{\text{symmetrisches}} 2\cdot\Phi(x)-1 = 0{,}9$$

$$\Rightarrow \quad x = 1{,}65$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{43-40}{\sigma} = 1{,}65 \xrightarrow[:1{,}65]{\cdot\sigma} \sigma = \frac{3}{1{,}65}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = 1{,}818$$

g) X ist $N(\mu\,;\sigma)$-verteilt.

Berechnen Sie μ und σ damit gilt:

I.) $P(X\le 507{,}1)=70\ \%$ und II.) $P(X\le 480{,}7)=10\ \%$

Lösung:

$$\mathit{Ansatz\ I}:$$

$$P(X\le 507{,}1)=70\ \% \Rightarrow \Phi(x) = 0{,}7 \Rightarrow x = 0{,}53$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{507{,}1-\mu}{\sigma} = 0{,}53 \xrightarrow[-507{,}1]{\cdot\sigma} \mu = 507{,}1-0{,}53\sigma$$

$$\mathit{Ansatz\ I}:$$

$$P(X\le 480{,}7)=10\ \% \Rightarrow \Phi(x) = 0{,}7 \Rightarrow x = -1{,}29$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{480{,}7-\mu}{\sigma} = -1{,}29 \xrightarrow[-480{,}7]{\cdot\sigma} \mu = 480{,}7+1{,}29\sigma$$

$$\mathit{Gleichsetzen}:$$

$$507{,}1-0{,}53\sigma = 480{,}7+1{,}29\sigma \Rightarrow \sigma = 14{,}505$$

$$\Rightarrow \quad \mu = 480{,}7+1{,}29\cdot 14{,}505 = 499{,}41145$$

3.) Ein Schützenfest ... (für die Normalverteilung)

Rudi Knopf ist ein bekannter Luftgewehrschütze – zumindest in seinem Ort.
Er trifft ein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

a) Wie viele Schüsse muss man Rudi gewähren, wenn man wünscht, dass er mit mind. 90 %-iger Sicherheit mehr als 50 Treffer landet?

Lösung:

$$P(X > 50) \geq 0,9 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(X \leq 50) \geq 0,9 \quad \Rightarrow \quad P(X \leq 50) \leq 0,1$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad \frac{50 + 0,5 - \mu}{\sigma} \quad = \quad \frac{50 + 0,5 - 0,7 \cdot n}{\sqrt{0,7 \cdot 0,3 \cdot n}} \quad \overset{\Phi(x)=0,1}{\leq} \quad -1,29$$

$$\Rightarrow \quad -0,7n + 0,59\sqrt{n} + 50,5 \quad \leq \quad 0$$

$$\xrightarrow[t := \sqrt{n}]{Substitution:} \quad -0,7t^2 + 0,59t + 50,5 \quad \leq \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 8,93 \quad \vee \quad t_2 = -8,09 \left[\text{diese Lösung ist nicht relevant}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Resubstitution}} \quad \sqrt{n} = 8,93 \quad \Rightarrow \quad n = 79,75 \quad \Rightarrow \quad n \geq 80$$

b) Im Schützenklub hat er heute 300 Schüsse abgegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mehr als 80 Mal daneben geschossen?

Lösung:

$$n = 300 \quad und \quad \mu = 300 \cdot 0,7 = 210$$

$$P(X \leq 219) \quad = \quad \Phi(1,20) \quad = \quad 0,88493$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad \frac{219 + 0,5 - 210}{\sqrt{210 \cdot 0,3}} \quad = \quad 1,20$$

c) Rudi macht ein Einzeltraining. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei 100 Schuss genau 70 Mal?

Lösung:

$$n = 100 \quad und \quad \mu = 100 \cdot 0,7 = 70$$

$$P(X = 70) \quad = \quad P(69,5 \leq X \leq 70,5) \quad = \quad 2 \cdot \Phi(0,11) - 1 \quad = \quad 0,0876$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad \frac{70 + 0,5 - 70}{\sqrt{21}} \quad = \quad 0,11$$

d) Am kommenden Sonntag hat einen Schützenwettbewerb und soll den Verein würdig vertreten. Jeder Konkurrent darf 200 Schuss abgeben. Welches Trefferergebnis ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 95 % zu erwarten?

Lösung:

$$n = 200 \quad und \quad \mu = 200 \cdot 0{,}7 = 140$$

$$P(X \geq k) \;=\; \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - 140}{\sqrt{42}}\right) \;\geq\; 0{,}95 \;\Rightarrow\; x \;\geq\; 1{,}65$$

$$\Rightarrow \;\frac{k + 0{,}5 - 140}{\sqrt{42}} \;\geq\; 1{,}65 \;\Rightarrow\; k \;\geq\; 150{,}19 \;\Rightarrow\; k \;\geq\; 151$$

4.) Totale Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

a) In einer Klasse sind 5 % der Schüler und 4 % der Schülerinnen älter als 17 Jahre. 40 % der Schüler sind weiblich.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Person weiblich, wenn sie älter als 17 Jahre ist?

Lösung:

$$P_{"18+"}("w") \;=\; \frac{P("18+" \cap "w")}{P("18+")}$$

$$P_{"18+"}("w") \;=\; \frac{0{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}6 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}04} \;=\; \frac{0{,}016}{0{,}046} \;=\; 0{,}3478$$

b) Ein Umfrage zur Beliebtheit der Wissensshow „Stochastik für Einsteiger“ hatte folgendes Ergebnis: Von den Zuschauern, die diese Serie gesehen hatten, waren 30 % älter als 40 Jahre; 55 % von diesen und 60 % von den übrigen Zuschauern hatten eine positive Meinung über die Serie.

(i) Berechnen Sie den Anteil der Zuschauer, die eine positive Meinung von der Sendereihe haben.

Lösung:

$$P("\,pos.\,Meinung\,") \;=\; 0{,}3 \cdot 0{,}55 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \;=\; 0{,}585$$

(ii) Ein Zuschauer, der sich positiv über die Sendung geäußert hat, wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er 40 Jahre oder jünger?

Lösung:

$$P_{"pos.\,Meinung"}("40-") = \frac{0,7\cdot 0,6}{0,585} = 0,718$$

5.) Qualitätskontrollen und Dispositionsprobleme

Die Produktion für Navigationsgeräte wird auf drei Produktionsstellen A, B und C zu 25 %, 35 % und 40 % verteilt. Die einzelnen Stellen arbeiten mit einem Ausschussanteil von 4 %, 5 % und 2 %.
Ein Gerät wird zufällig ausgewählt und es wird ein Defekt festgestellt.

a) Von welcher Maschine stammt es mit größter Wahrscheinlichkeit?

Lösung:

$$P("Fehler") = 0,25\cdot 0,04 + 0,35\cdot 0,05 + 0,4\cdot 0,02 = 0,0355$$

$$P("M_1") = \frac{0,25\cdot 0,04}{0,0355} = 0,2817$$

$$P("M_2") = \frac{0,35\cdot 0,05}{0,0355} = 0,493$$

$$P("M_3") = \frac{0,4\cdot 0,02}{0,0355} = 0,2252$$

Das fehlerhafte Gerät stammt mit größter Wahrscheinlichkeit von Maschine M_2.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 10.000 Geräten zwischen 320 und 400 Geräte defekt?

Lösung:

$$p = 0,0355 \quad n = 10.000 \quad und \quad \mu = 10.000\cdot 0,0355 = 355$$

$$P(320 \le X \le 400) = \Phi\left(\frac{400+0,5-355}{18,50}\right) - \Phi\left(\frac{320-0,5-355}{18,50}\right)$$

$$P(320 \le X \le 400) = \Phi(2,46) - \Phi(-1,92)$$

$$P(320 \le X \le 400) = 0,99305 - 0,02743 = 0,96562$$

c) Wie hoch darf der Ausschussanteil der Produktionsstelle B nur noch sein, damit die Wahrscheinlichkeit für höchstens 40 defekte Geräte bei mindestens 97,5 % liegt, wenn 1.000 Geräte produziert werden?

Lösung:

$$p = ? \quad und \quad \mu = p \cdot 1.000 \quad und \quad \sigma = \sqrt{p \cdot (1-p) \cdot 1.000}$$

$$P(X \leq 40) \quad = \quad \Phi\left(\frac{40 + 0,5 - 1.000p}{\sqrt{p \cdot (1-p) \cdot 1.000}}\right) \quad \geq \quad 0,975$$

$$\Rightarrow \quad \frac{40,5 - 1.000p}{\sqrt{p \cdot (1-p) \cdot 1.000}} \quad \geq \quad 1,96$$

$$\Rightarrow \quad 40,5 - 1.000p \quad \geq \quad 1,96 \cdot \sqrt{p \cdot (1-p) \cdot 1.000}$$

$$\Rightarrow \quad (40,5 - 1.000p)^2 \quad \geq \quad 3,8416 \cdot \left(1.000p - 1.000p^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1.640,25 - 81.000p + 10^6 p^2 \quad \geq \quad 3.841,6p - 3.841,6p^2$$

$$\Rightarrow \quad 1.003.841,6p^2 - 84.841,6p + 1.640,25 \quad \geq \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 - 0,084517p + 0,001634 \quad \geq \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad p_{1/2} \quad = \quad \frac{0,0845 \pm 0,02464}{2}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 \quad = \quad 0,0546 \quad \vee \quad p_2 \quad = \quad 0,02993$$

$$wähle \quad p_2 \quad = \quad 0,02993:$$

$$P(\text{"}Fehler\text{"}) \quad = \quad 0,25 \cdot 0,04 + 0,35 \cdot x + 0,4 \cdot 0,02 \quad = \quad 0,02993$$

$$P(\text{"}Fehler\text{"}) \quad = \quad 0,01 + 0,35 \cdot x + 0,008 \quad = \quad 0,02993$$

$$P(\text{"}Fehler\text{"}) \quad = \quad 0,35 \cdot x \quad = \quad 0,01193$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad 0,03408$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ausschussquote für Maschine } \mathrm{M}_2: \quad 3,408\,[\%]$$

6.) Problem von Student Karl Knackwurst

Karl hat im Discounter nebenan eine Packung mit 10 Eiern gekauft, von denen allerdings zwei Eier faul sind, was man diesen leider nicht ansehen kann. Nun will er sich ein Omlett aus vier Eiern zubereiten. Sollte unter den vier Eiern auch nur eines der faulen Eier sein, wird das Omlett ungenießbar.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sein Essen genießbar?

<u>Lösung:</u>

$$\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

Nun hat Karl noch einen Gast eingeladen, dem er ebenfalls ein Omlett vorsetzen und damit seine Kochkunst demonstrieren möchte.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Omlette genießbar?

<u>Lösung:</u>

$$1.\,\textit{Möglichkeit}:$$

$$\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} \cdot \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{4}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{45}$$

$$2.\,\textit{Möglichkeit}:$$

$$\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{8}}{\binom{10}{8}} = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$$

7.) **Beweis:**

Zeigen Sie, dass für jede Binomialverteilung X=k gilt:

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad B_{n;p}\left(X=k\right)\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}$$

Lösung:

$$Behauptung:$$

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad B_{n;p}\left(X=k\right)\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}$$

$$Beweis:$$

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad \binom{n}{k+1}p^{k+1}\left(1-p\right)^{n-k-1}$$

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad \frac{n!}{\left(k+1\right)!\cdot\left(n-k-1\right)!}\cdot p^{k}\cdot p\cdot\left(1-p\right)^{n-k}\cdot\left(1-p\right)^{-1}$$

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad \frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}\cdot\frac{p}{\left(1-p\right)}$$

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad \binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{\left(1-p\right)}$$

$$B_{n;p}\left(X=k+1\right) \quad = \quad B_{n;p}\left(X=k\right)\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}$$