Musterlösung **13. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 09.03.2007**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Themen: **Abschließende Kursarbeit**
(Alle Themengebiete)

Aufgabenbereich I: Analysis

Teil 1:

Das Unternehmen Peter Lustig & Co KG ist in der Konsumgüterbranche (Unterhaltungselektronik) tätig. In diesem Unternehmen gibt es einige Wachstumsprobleme zu lösen:

1.) Die letzte Marktforschung hat ergeben, dass das Einkommen x [in 1 000 €] folgenden Einfluss auf die Nachfrage $f_k(x)$ nach einigen der wichtigsten Produkte von Peter Lustig hat:

$$f_k(x) = 5 \cdot \frac{2}{1+e^{2-kx}} \qquad D = \Re_0^+$$

Dabei ist k ein produktspezifischer Parameter.

a) Bestimmen Sie die Sättigungsgrenze.

Lösung:

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{10}{1+e^{2-kx}} = \lim_{x \to \infty} \frac{10}{1+\frac{e^2}{e^{kx}}} \to \frac{10}{1+0} = 10$$

b) Zeigen Sie dass die Funktion in folgende Form umgewandelt werden kann:

$$f_k(x) = \frac{10e^{kx}}{e^{kx}+e^2}$$

Lösung:

$$f_k(x) = 5 \cdot \frac{2}{1+e^{2-kx}} = \frac{10}{1+\frac{e^2}{e^{kx}}} = \frac{10}{\frac{e^{kx}+e^2}{e^{kx}}} = \frac{10e^{kx}}{e^{kx}+e^2}$$

c) Beweisen Sie ausgehend von der veränderten Funktion aus b), dass die beiden ersten Ableitungen der Funktion folgendes Aussehen haben:

$$f_k'(x) = \frac{10ke^{kx+2}}{\left(e^{kx}+e^2\right)^2} \qquad f_k''(x) = -\frac{10k^2e^{kx+2}\cdot\left(e^{kx}-e^2\right)}{\left(e^{kx}+e^2\right)^3}$$

Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{10e^{kx}\cdot k\cdot\left(e^{kx}+e^2\right)-10e^{kx}\cdot k\cdot e^{kx}}{\left(e^{kx}+e^2\right)^2} = \frac{10ke^{kx}\left[\left(e^{kx}+e^2\right)-e^{kx}\right]}{\left(e^{kx}+e^2\right)^2}$$

$$f_k'(x) = \frac{10ke^{kx}\cdot e^2}{\left(e^{kx}+e^2\right)^2} = \frac{10ke^{kx+2}}{\left(e^{kx}+e^2\right)^2}$$

$$f_k''(x) = \frac{10ke^{kx+2}\cdot k\cdot\left(e^{kx}+e^2\right)^2-10ke^{kx+2}\cdot 2\cdot\left(e^{kx}+e^2\right)\cdot e^{kx}\cdot k}{\left(e^{kx}+e^2\right)^4}$$

$$f_k''(x) = \frac{10k^2e^{kx+2}\cdot\left(e^{kx}+e^2\right)-10k^2e^{kx+2}\cdot 2\cdot e^{kx}}{\left(e^{kx}+e^2\right)^3}$$

$$f_k''(x) = \frac{10k^2e^{kx+2}\cdot\left[\left(e^{kx}+e^2\right)-2e^{kx}\right]}{\left(e^{kx}+e^2\right)^3}$$

$$f_k''(x) = \frac{10k^2e^{kx+2}\cdot\left(e^2-e^{kx}\right)}{\left(e^{kx}+e^2\right)^3} = -\frac{10k^2e^{kx+2}\cdot\left(e^{kx}-e^2\right)}{\left(e^{kx}+e^2\right)^3}$$

d) Bestimmen Sie die Trendwende für diese Produkte in Abhängigkeit von k.
Wie hoch ist die Nachfrage an der Trendwende?

<u>Lösung:</u>

$$f_k''(x) \quad = \quad -\frac{10k^2e^{kx+2}\cdot\left(e^{kx}-e^2\right)}{\left(e^{kx}+e^2\right)^3} \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{kx}-e^2=0 \quad \Rightarrow \quad e^{kx}=e^2 \quad \xrightarrow{\ln} \quad kx=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{k}$$

$$\text{Funktionswert:}$$

$$f_k\left(\frac{2}{k}\right) \quad = \quad 5\cdot\frac{2}{1+e^{2-k\cdot\frac{2}{k}}} \quad = \quad 5$$

Sei nun k = 1

e) Ermitteln Sie die Zuwachsraten für x = 1 und x = 2.

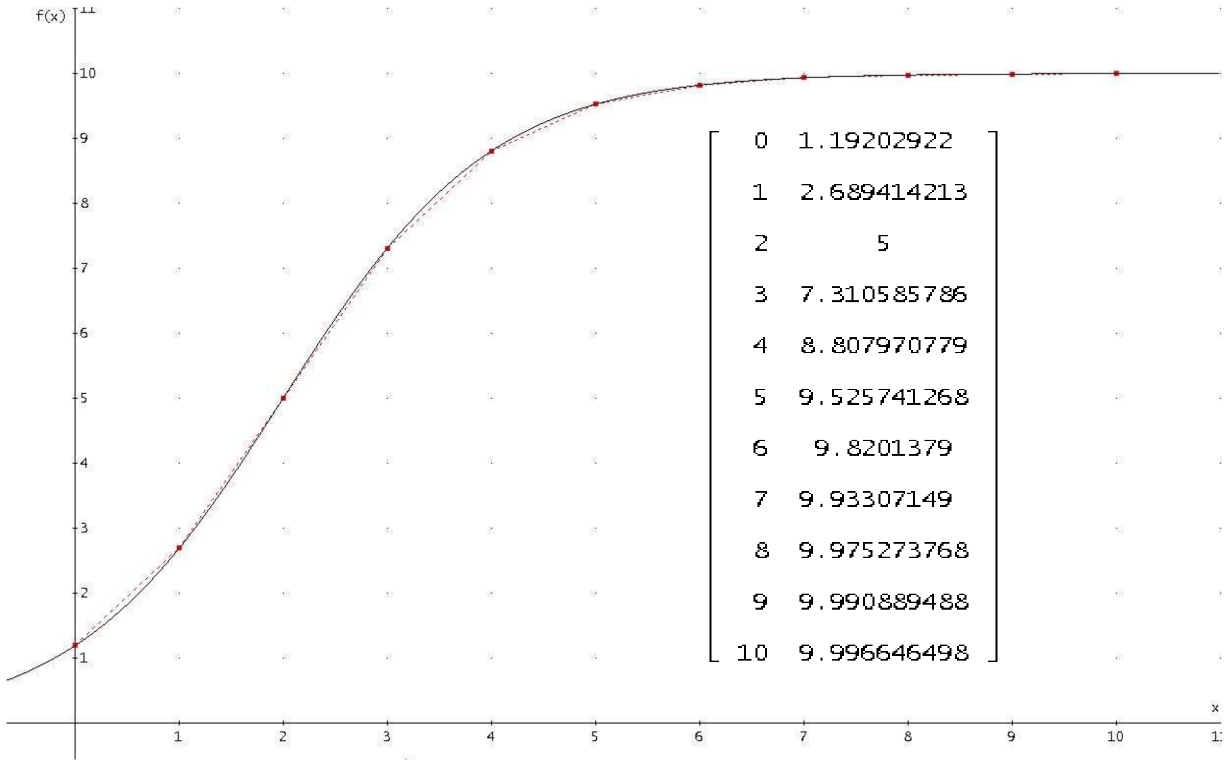
<u>Lösung:</u>

$$f_1'(1) \quad = \quad \frac{10e^{1+2}}{\left(e^1+e^2\right)^2} \quad = \quad \frac{10e^3}{\left(e^1+e^2\right)^2} \quad \approx \quad 1{,}966$$

$$f_1'(2) \quad = \quad \frac{10e^{2+2}}{\left(e^2+e^2\right)^2} \quad = \quad \frac{10e^4}{\left(2e^2\right)^2} \quad = \quad \frac{10e^4}{4e^4} \quad = \quad 2{,}5$$

f) Zeichnen Sie den Verlauf der Nachfragekurve im Bereich $x \in [0\,;10]$ in „1er-Schritten“.

Lösung:



g) Um welche Art von Wachstum handelt es sich?

Lösung: Logistisches Wachstum

2.) In einer Stadt gibt es ungefähr 80 000 Haushalte. Man schätzt, dass rund ein Viertel davon vom analogen zum digitalen Fernsehen wechseln wollen.

In den ersten drei Monaten nach Verkaufsbeginn werden 2 000 Stück der digitalen Receiver verkauft.

a) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion, die den Absatz in Abhängigkeit von der **Zeit in Monaten** beschreibt.

Anmerkung: Die Funktion soll folgendem Typ entsprechen:

$$f_{S,k}(t) \quad = \quad S \cdot \left(1 - e^{-kt}\right)$$

Lösung:

S = Sättigungsmenge: 80.000/4 = 20.000

$$f_{S,k}(3) = 20.000\cdot\left(1-e^{-3\cdot k}\right) \overset{!}{=} 2.000 \Rightarrow e^{-3\cdot k} = 0{,}9$$

$$\xrightarrow{\ln} -3\cdot k = \ln 0{,}9 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}\ln 0{,}9 = 0{,}035$$

$$Funktion: \quad f(t) = 20.000\cdot\left(1-e^{-0{,}035\cdot t}\right)$$

b) Können die Händler damit rechnen, dass innerhalb eines Jahres wenigstens 8 000 Stück verkauft werden?

Lösung:

$$f(12) = 20.000\cdot\left(1-e^{-0{,}035\cdot 12}\right) = 6.878{,}00 < 8.000$$

Die Händler können nicht damit rechnen, ihr Verkaufsziel zu realisieren.

Teil 2:

Gegeben sei nun folgende Funktion: $g_a(x) = \dfrac{4a}{x^2+a} \quad mit \quad a\in\Re\setminus\{0\}$

1.) Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Funktion. (Fallunterscheidung!)

Lösung:

$$x^2+a = 0 \xrightarrow{-a} x^2 = -a$$

$$\text{Fall 1: a > 0: keine Lösung} \Rightarrow D = \Re$$

$$\text{Fall 2: a < 0:} \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x| = \sqrt{-a} \Rightarrow D = \Re\setminus\left\{\pm\sqrt{-a}\right\}$$

2.) Zeigen Sie, dass die Funktion achsensymmetrisch ist.

Lösung:

$$g_a(-x) = \frac{4a}{(-x)^2+a} = \frac{4a}{x^2+a} = g_a(x) \Rightarrow Achsensymmetrie$$

Nun sei a > 0:

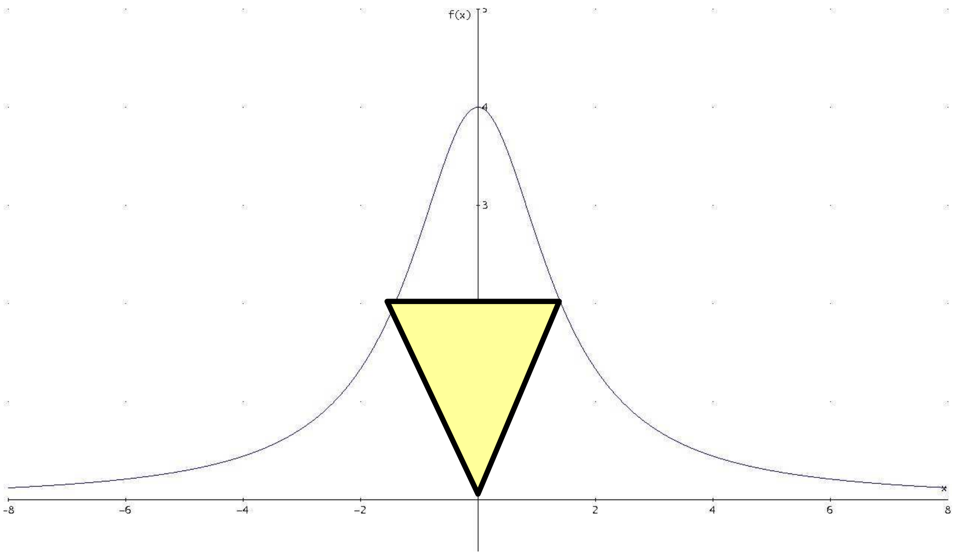
3.) Die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks liege im Ursprung, die beiden anderen Eckpunkte auf dem Funktionsgraphen symmetrisch zu y-Achse.

(i) Ermitteln Sie die Eckpunkte des flächengrößten derartigen Dreiecks.

(ii) Zeichnen Sie das Dreieck ein und geben Sie auch die Fläche an.

Anmerkung: Es genügt hier das notwendige Kriterium!

Hier ist die Funktion für a = 2 gezeichnet:



<u>Lösung:</u>

$$Höhe: \quad h = g_a(x) \qquad Grundlinie: \quad g = 2x$$

$$Dreickfläche: \quad A(g,h) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \xrightarrow{eingesetzt} A(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{x^2+a} \cdot 2x = \frac{4ax}{x^2+a}$$

$$A'(x) = \frac{4a \cdot (x^2+a) - 8ax^2}{(x^2+a)^2} = \frac{-4ax^2+4a^2}{(x^2+a)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x^2 = a \Rightarrow |x| = \sqrt{a}$$

$$Eckpunkte:$$

$$g_a(\pm\sqrt{a}) = \frac{4a}{(\pm\sqrt{a})^2 + a} = \frac{4a}{a+a} = 2$$

$$\Rightarrow E_1(-\sqrt{a} \mid 2) \quad und \quad E_1(\sqrt{a} \mid 2)$$

Fläche:

$$Höhe: \quad h = 2 \qquad Grundlinie: \quad g = 2\sqrt{a}$$

$$Dreickfläche:$$

$$A(g,h) \;=\; \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a}\cdot 2 \;\xrightarrow{eingesetzt}\; A(x) \;=\; \frac{4a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2 + a}$$

$$A(g,h) \;=\; 2\sqrt{a} \;\xrightarrow{eingesetzt}\; A(x) \;=\; \frac{4a\sqrt{a}}{2a} \;=\; 2\sqrt{a}$$

4.) Ermitteln Sie die Fläche $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t \frac{4a}{x^2}\,dx \quad mit \quad a > 0$ und zeigen Sie, dass die Fläche unabhängig vom Parameter a ist.

<u>Lösung:</u>

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{4a}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{4a}{x}\right]_a^t \;=\; \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{4a}{t}\right]-\left[-\frac{4a}{a}\right] \;=\; 0+4 \;=\; 4$$

Aufgabenbereich II: Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen A_t , B_s und der Vektor $\vec{c}$ durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ t & -3 & 6 \\ -1 & t+1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B_s = \begin{pmatrix} 0 & s & 4 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$mit\ s,t \in \Re$$

Teil 1:

1.) Es sei zunächst **t** = 1!
Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$A_1 \cdot \vec{x} = \vec{c}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcll} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &=& 1 & (1) \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 &=& 6 & (2) \\ -x_1 + 2x_2 &=& 3 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &=& 1 & (1) \\ -x_2 + 4x_3 &=& 5 & (2) \\ -x_1 + 2x_2 &=& 3 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &=& 1 & (1) \\ -x_2 + 4x_3 &=& 5 & (2) \\ 2x_3 &=& 4 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &=& 1 & (1) \\ x_2 - 4x_3 &=& -5 & (2) \\ 2x_3 &=& 4 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 \quad - 6x_3 &=& -9 & (1) \\ x_2 - 4x_3 &=& -5 & (2) \\ 2x_3 &=& 4 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 \quad - 6x_3 &=& -9 & (1) \\ x_2 - 4x_3 &=& -5 & (2) \\ x_3 &=& 2 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 &=& 3 & (1) \\ x_2 - 4x_3 &=& -5 & (2) \\ x_3 &=& 2 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 &=& 3 & (1) \\ x_2 &=& 3 & (2) \\ x_3 &=& 2 & (3) \end{array}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 3$

$x_2 = 3$

$x_3 = 2$

2.) Für welche Werte von $t \in \Re$ ist das homogene LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{0}$ eindeutig lösbar?

Lösung:

$$Det(A_t) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ t & -3 & 6 \\ -1 & t+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 2t\cdot(t+1) - 6 - 6\cdot(t+1) - 0 = 2t^2 - 4t$$

$$\Rightarrow \quad 2t(t-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = 2$$

$\Rightarrow$ $für\ t \in \Re \setminus \{0\,;\,2\}$ ist das homogene LGS eindeutig lösbar.

Der Lösungsvektor ist dabei der Nullvektor.

3.) Für welche Werte von $t \in \Re$ hat das inhomogene LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{c}$

(i) genau eine Lösung? (ii) keine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen.

Lösung: Es müssen die Sonderfälle $\mathbf{t_1} = 0$ und $\mathbf{t_2} = 2$ untersucht werden.

Fall 1: $t_1 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} I.) & 1 & -2 & 2 & 1 \\ II.) & 0 & -3 & 6 & 6 \\ III.) & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \xrightarrow{III.)+I.)}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} I.) & 1 & -2 & 2 & 1 \\ II.) & 0 & -3 & 6 & 6 \\ III.) & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \xrightarrow{II.)-3\cdot III.)}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} I.) & 1 & -2 & 2 & 1 \\ II.) & 0 & 0 & 0 & -6 \\ III.) & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array} \Rightarrow \text{ keine Lösung}$$

Fall 2: $t_2 = 2$

$$\begin{array}{r|rrr|r} I.) & 1 & -2 & 2 & 1 \\ II.) & 2 & -3 & 6 & 6 \\ III.) & -1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \xrightarrow[III.)+I.)]{II.)-2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} I.) & 1 & -2 & 2 & 1 \\ II.) & 0 & 1 & 2 & 4 \\ III.) & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \xrightarrow{III.)-II.)}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} I.) & 1 & -2 & 2 & 1 \\ II.) & 0 & 1 & 2 & 4 \\ III.) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{ unendlich viele Lösungen}$$

Für $t \in \Re \setminus \{0\,;2\}$ ist das inhomogene LGS eindeutig lösbar.

4.) Berechnen Sie die eindeutige Lösung $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von **t**!

Anmerkung: Verwenden Sie die Cramer-Regel!

<u>Lösung:</u>

$$\textit{für } t \in \Re \setminus \{0\,;2\} \textit{ gilt}:$$

$$x_1(t) = \frac{6(t-2)}{2t(t-2)} = \frac{3}{t} \quad \wedge \quad x_2(t) = \frac{6(t-2)}{2t(t-2)} = \frac{3}{t} \quad \wedge \quad x_3(t) = \frac{(t+3)(t-2)}{2t(t-2)} = \frac{(t+3)}{2t}$$

5.) Bestimmen Sie den Wert von **t**, für den der Lösungsvektor die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \quad hat, \quad also \quad x = x_1 = x_2 = x_3$$

<u>Lösung:</u>

$$\text{Vektor } \vec{x} \text{ lautet: } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x \end{pmatrix}$$

$$\textit{Lösungsweg } 1:$$

$$A_t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ t & -3 & 6 \\ -1 & t+1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ tx+3x \\ tx \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textit{vergleich}]{\textit{Komponenten-}} \begin{array}{c} x = 1 \\ \text{Probe: } 3+3=6 \\ t = 3 \end{array}$$

$$\textit{Lösungsweg } 2:$$

Verwendung der Lösung von der vorherigen Aufgabe:

$$\frac{3}{t} = \frac{3}{t} = \frac{t+3}{2t} \xrightarrow[\cdot t]{\cdot 2t} 6t = t^2 + 3t \Rightarrow t(t-3) = 0 \Rightarrow t = 3$$

Die Lösung t = 0 entfällt, da "0" nicht im Definitionsbereich für t liegt.

Teil 2:

1.) Zeigen Sie, dass die Matrix $A_1^T + B_1$ (**s = t = 1**) invertierbar ist!

Lösung:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Transponieren}} A_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_1^T + B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Bedingung}: \quad A_1^T + B_1 \quad \textit{invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Det}\left(A_1^T + B_1\right) \neq 0$$

$$\textit{Beweis}: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6+4+12-9-4-8 = 1 \neq 0 \Rightarrow A_1^T + B_1 \quad \textit{invertierbar}$$

2.) Lösen Sie die Gleichung $\left(A_1 \cdot X^T\right)^T - 3E = A_2 - X \cdot B_1$

Verwenden Sie dabei nur erlaubte Rechenoperationen und Umformungen aus der Matrizenrechnung. Kommentieren Sie jeden Rechenschritt bzw. jede Umformung!

Die Matrix X soll nur allgemein – nicht explizit – berechnet werden.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\left(A_1 \cdot X^T\right)^T - 3E &= A_2 - X \cdot B_1 && \xrightarrow[\text{Produkt transponieren}]{\text{Klammer auflösen}} \\
X \cdot A_1^T - 3E &= A_2 - X \cdot B_1 && \xrightarrow{\text{Addition von 3E}} \\
X \cdot A_1^T &= A_2 - X \cdot B_1 + 3E && \xrightarrow{\text{Addition von } XB_1} \\
X \cdot A_1^T + X \cdot B_1 &= A_2 + 3E && \xrightarrow{\text{X ausklammern}} \\
X \cdot \left(A_1^T + B_1\right) &= A_2 + 3E && \xrightarrow[\text{mit der Inversen } \left(A_1^T + B_1\right)^{-1}]{\text{Multiplikation von rechts}} \\
X &= \left(A_2 + 3E\right) \cdot \left(A_1^T + B_1\right)^{-1} && \textit{Endergebnis}
\end{aligned}$$

Aufgabenbereich III: Stochastik

1.) Die Polizei führt eine Verkehrskontrolle durch bei der neben der Ver kehrssicherheit und dem adäquaten Fahrverhalten auch andere Informationen festgehalten werden.

So beträgt der Anteil heller Autos (H-Autos) nach Angaben der Hersteller 55 %. Die Polizei kontrolliert 500 Autos.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) mindestens 275 H-Autos zu zählen?

b) zwischen 250 und 300 H-Autos zu zählen?

<u>Lösung:</u>

$$P(X \geq 275) = 1 - P(X \leq 274) = 1 - \Phi\left(\frac{274 + 0,5 - 275}{11,12}\right)$$

$$P(X \geq 275) = 1 - \Phi(-0,0449) = 1 - (1 - 0,51994) = 0,51994$$

$$P(250 \leq X \leq 300) = P(X \leq 300) - P(X \leq 249)$$

$$P(250 \leq X \leq 300) = \Phi\left(\frac{300 + 0,5 - 275}{11,12}\right) - \Phi\left(\frac{249 + 0,5 - 275}{11,12}\right)$$

$$P(250 \leq X \leq 300) = 2 \cdot \Phi(2,29) - 1 = 0,97798$$

2.) Die Polizei stellt im Rahmen einer Erhebung von 100 Fahrzeugen fest, dass nur 48 eine helle Farbe besitzen.

Muss aufgrund dieses Ergebnisses nun die Herstellerangabe von 55 % korrigiert werden, wenn man von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % ausgeht?

<u>Lösung:</u>

$$H_0: \quad p_0 = 0,55 \qquad H_1: \quad p_1 \neq 0,55 \qquad \text{zweiseitiger Hypothesentest}$$

$$n = 100 \quad \Rightarrow \quad \mu = 100 \cdot 0,55 = 55 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{55 \cdot 0,45} = 4,975$$

$$2\Phi(z) - 1 \leq 0,95 \xrightarrow{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)} \Phi(z) = 0,975$$

$$\xrightarrow{Tabelle} \quad z = 1,96$$

$$\textit{linke Seite}: \quad x_1 \quad = \quad 55-1{,}96\cdot 4{,}975 \quad = \quad 55-9{,}7508 \quad = \quad 45{,}25$$
$$\textit{rechte Seite}: \quad x_2 \quad = \quad 55+1{,}96\cdot 4{,}975 \quad = \quad 55+9{,}7508 \quad = \quad 64{,}75$$
$$\Rightarrow \quad \textit{Annahme}: \quad A\in \left[46\,;64\right]$$

$\Rightarrow$ Die Hypothese kann nicht verworfen werden, da 48 im Annahmeintervall liegt.

Unterstellen Sie für die folgenden Aufgaben die Binomialverteilung:

3.) Wie viele Autos müsste die Polizei erfassen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens ein H-Auto dabei ist.

<u>Lösung:</u>

$$B_{n\,;\,0{,}55}\left(X \geq 1\right) \quad = \quad 1-B_{n\,;\,0{,}55}\left(X=0\right) \quad \geq \quad 0{,}99$$
$$\Rightarrow \quad \binom{n}{0}\cdot 0{,}55^0\cdot 0{,}45^n \quad \leq \quad 0{,}01 \quad \xrightarrow{\ln} \quad n\cdot\ln\left(0{,}45\right) \quad \leq \quad \ln\left(0{,}01\right)$$
$$\Rightarrow \quad n \quad \geq \quad \frac{\ln\left(0{,}01\right)}{\ln\left(0{,}45\right)} \quad = \quad 5{,}767 \quad \Rightarrow \quad n \quad \geq \quad 6$$

4.) Wie groß wäre der Anteil p der H-Autos mind., wenn von den **500** vorbeifahrenden Autos mit 99,9 %iger Wahrscheinlichkeit mind. eines eine helle Farbe haben sollte.

<u>Lösung:</u>

$$B_{500\,;\,p}\left(X \geq 1\right) \quad = \quad 1-B_{500\,;\,p}\left(X=0\right) \quad \geq \quad 0{,}999$$
$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \quad \binom{500}{0}p^0\cdot\left(1-p\right)^{500} \quad \leq \quad 0{,}001$$
$$\xrightarrow{\text{vereinfachen und } \sqrt[500]{(1\text{-p})}} \quad \left(1-p\right) \quad \leq \quad \sqrt[500]{0{,}001}$$
$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \quad p \quad \geq \quad 1-\sqrt[500]{0{,}001} \quad = \quad 0{,}0137 \quad = \quad 1{,}37\left[\%\right]$$

Weiterhin stellt die Polizei fest, dass unter den **100 Kontrollen** 4 % zu schnell fuhren und 2,2 % zu schnell waren **und** helle Fahrzeuge besaßen.

5.) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeiten für eine „ordnungsgemäße bzw. angepasste Geschwindigkeit"?

Lösung:

$$P(\text{"}ord.Geschw.\text{"}) \quad = \quad 1 - P(\text{"}zu\ schnell\text{"}) \quad = \quad 1 - 0{,}04 \quad = \quad 0{,}96$$

6.) Prüfen Sie, ob, die beiden Ereignisse „hell" und „zu schnell" stochastisch unabhängig sind.

Anmerkung: Verwenden Sie für die Eigenschaft „hell" die Herstellerangaben.

Lösung:

Bedingung für die stochastische Unabhängigkeit:

$$P(H) \cdot P(\text{"}zu\ schnell\text{"}) \quad = \quad P(H \cap \text{"}zu\ schnell\text{"})$$

$$P(H) \cdot P(\text{"}zu\ schnell\text{"}) \quad = \quad 0{,}55 \cdot 0{,}04 \quad = \quad 0{,}022$$

$$P(H \cap \text{"}zu\ schnell\text{"}) \quad = \quad 0{,}022$$

$\Rightarrow$ Die beiden Eigenschaften sind stochastisch unabhängig.

7.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass frühestens der 10. Fahrer zu schnell fährt.

Lösung:

$$P \quad = \quad 0{,}96^9 \cdot (0{,}04 + 0{,}96) \quad = \quad 0{,}6925$$

Die ersten 9 Fahrer sind nicht zu schnell, ab dem 10. Fahrer ist es egal.

Dabei werden auch Lichttests durchgeführt. Aufgrund von Erfahrungswerten funktionieren 10 % der Lichter nicht ordnungsgemäß.

8.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Fahrzeuge den Lichttest nicht bestehen?

Lösung:

$$B_{100\,;\,0{,}1}(X \geq 15) \quad = \quad 1 - B_{100\,;\,0{,}1}(X \leq 14) \quad = \quad 1 - 0{,}9274 \quad = \quad 0{,}0726$$

Bei den 100 Lichttests und der durchschnittlichen Fehlerquote von 10 % hat die Polizei festgestellt, dass bei verschiedenen Automarken unterschiedlich hohe Fehlerquoten vorliegen:

Opel: 6 % Mercedes: 8 % Audi: 10 % VW: 15 %

Es wurden 20 Opel und 25 Mercedes kontrolliert.

9.) Wie viele der anderen beiden Marken wurden dann demzufolge untersucht?

Lösung:

$n = 100$

Automarke	Opel	Mercedes	Audi	VW	*Gesamt*
Fehlerquote	$0,06$	$0,08$	$0,1$	$0,15$	$0,1$
Anzahl	20	25	$55 - x$	x	100
Produkt	$0,06 \cdot 20 = 1,2$	$0,08 \cdot 25 = 2$	$0,1 \cdot (55 - x) = 5,5 - 0,1x$	$0,15 \cdot x$	$0,1 \cdot 100 = 10$

Ansatz :

$$1,2 + 2 + 5,5 - 0,1x + 0,15x \quad = \quad 10 \quad \Rightarrow \quad 0,05x \quad = \quad 1,3 \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad 26$$

$$\textit{Anzahl Audi}: \quad 55 - 26 \quad = \quad 29$$
$$\textit{Anzahl VW}: \quad 26$$

In den Leistungskursen Mathematik eines Gymnasiums werden 7 Teilgebiete behandelt, von denen 3 zufällig für die Abiturprüfung ausgewählt werden.

Ein Prüfungsteilnehmer hat sich auf 4 Teilgebiete vorbereitet, während er die restlichen 3 vernachlässigt.

10.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden im Abitur genau die vorbereitenden Gebiete geprüft?

Lösung:

$$H(X = 3) \quad = \quad \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} \quad = \quad \frac{4 \cdot 1}{35} \quad = \quad 0,1143$$

11.) Erstellen Sie eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten p_k und der Verteilung, dass genau k der vorbereitenden Gebiete geprüft werden.

Lösung:

X = k	0	1	2	3
$H(X=k)$	$\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$	$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}$	$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}$	$\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$
$H(X \le k)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{13}{35}$	$\frac{31}{35}$	$\frac{35}{35}=1$

12.) Wie hoch ist der Erwartungswert für diese Situation?

Geben Sie zudem eine kurze Interpretation für diesen Wert hinsichtlich der Situation in der Aufgabenstellung.

Lösung:

$$E(X) \quad = \quad 0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35} \quad = \quad \frac{60}{35} \quad = \quad 1{,}714$$

Würden die Schüler sich einer solchen Taktik unterwerfen, würde man von drei Prüfungsthemen im Durchschnitt 1,714 Treffer landen, d.h. 1,7 korrekte Themengebiete zur Prüfung vorbereitet haben.