Musterlösung	**13. Jgst.**	**Test**	**Datum: 26.09.2006**
	Klasse: GY 04 c	**Fach: Mathematik (Leistungsfach)**	

Themen: **Mengen; Laplace; Kolmogorov; Bed. Wahrscheinlichkeit; Stochastische Unabhängigkeit**

1.) Stochastische Unabhängigkeit

In einem Kurs beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Langschläfer 40 % und für einen Kaffeetrinker 25 %.

Die beiden Merkmale treten unabhängig voneinander auf.

a) Bilden Sie eine vollständige Vierfeldertafel.

Lösung:

$$stoch.\,Unabhängigkeit:$$

$$\Rightarrow \quad P(L)\cdot P(K) \quad = \quad P(L\cap K)$$

$$\Rightarrow \quad P(L)\cdot P(K) \quad = \quad 0,4\cdot 0,24 \quad = \quad 0,1 \quad = \quad P(L\cap K)$$

	L	$\overline{L}$	$\sum$
K	**0,10**	**0,15**	**0,25**
$\overline{K}$	**0,30**	**0,45**	**0,75**
$\sum$	**0,40**	**0,60**	**1,00**

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person

(i) Langschläfer und Kaffeetrinker ist?
(ii) Langschläfer oder Kaffeetrinker ist?
(iii) Langschläfer, aber kein Kaffeetrinker ist?

Lösung:

$$(i) \quad P(L\cap K) \quad = \quad 0,1$$

$$(ii) \quad P(L\cup K) \quad = \quad P(L)+P(K)-P(L\cap K)$$

$$\Rightarrow \quad P(L\cup K) \quad = \quad 0,4+0,25-0,1 \quad = \quad 0,55$$

$$(iii) \quad P(L\cap \overline{K}) \quad = \quad 0,3$$

2.) **Bedingte Wahrscheinlichkeit I**

In einem 100m-Lauf schätzen die Experten die Siegchancen der Läufer Alfredo, Bertolini und Carlo mit 40 %, 30 %, und 10 % ein.

Kurz vor dem Start verletzt sich Alfredo so, dass er nicht teilnehmen kann.

Wie groß sind nun die Siegchancen für Bertolini?

Lösung:

$$\textit{Vor der Verletzung}: \quad \Rightarrow \quad 4:3:1:2 \quad \Rightarrow \quad 10\left[\textit{Anteile}\right]$$

$$\textit{Nach der Verletzung}: \quad \Rightarrow \quad 3:1:2 \quad \Rightarrow \quad 6\left[\textit{Anteile}\right]$$

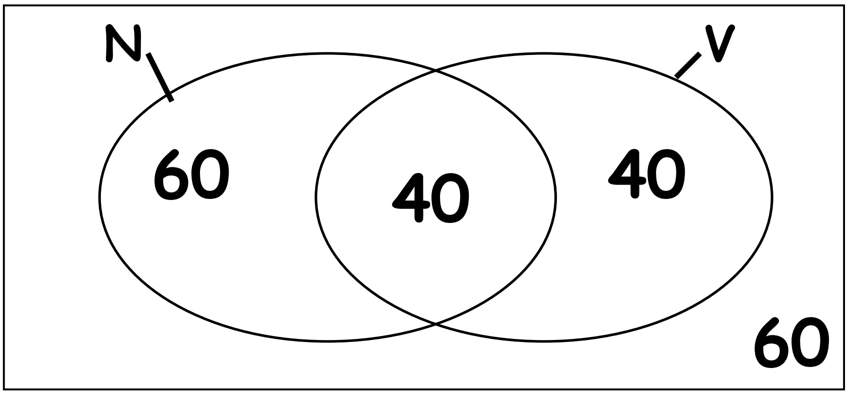
$$\Rightarrow \quad P\left(\text{"}\textit{Sieg Bertolini}\text{"}\right) \quad = \quad \frac{3}{6} \quad = \quad 0{,}5$$

3.) **Mengenlehre**

In einem Restaurant essen 60 % der Gäste keine Vorspeise und 50 % keinen Nachtisch. 30 % bestellen weder Vor- noch Nachspeise.

a) Bilden Sie ein Mengenübersicht (Venn-Diagramm) für 200 Personen.

Lösung:



Ω = 200

$$\left|V\right| = 80 \qquad \left|N\right| = 100 \qquad \Rightarrow \qquad 180$$

$$\left|\overline{V}\right| = 120 \qquad \left|\overline{N}\right| = 100 \qquad \Rightarrow \qquad 220$$

b) Wie viele Personen essen Vor- und Nachspeise?

Lösung: $\left|N \cap V\right| \quad = \quad 40$

4.) **Wahrscheinlichkeiten**

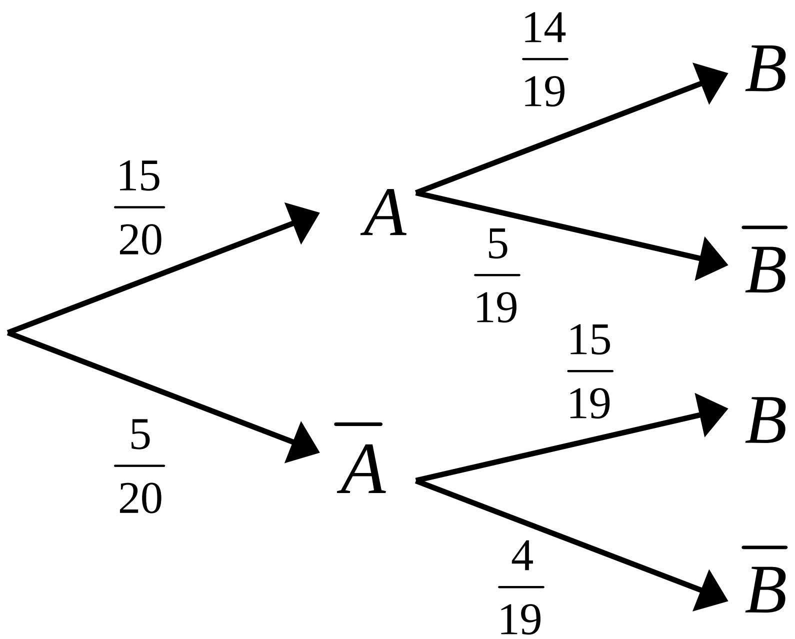
In einer Lieferung von 20 Knopfbatterien ist ein Viertel der Batterien ungeladen – also defekt. Man entnimmt nacheinander ohne Zurücklegen zwei Batterien und prüft sie:

Es sei

A: Die 1. Batterie ist geladen B: Die zweite Batterie ist geladen

a) Bilden Sie ein Baumdiagramm für die beiden Entnahmen.

Lösung: ***Wichtig: Ziehen ohne Zurücklegen!***



b) Berechnen Sie:

(i) P(A) (ii) P(B) (iii) $P(A \cap B)$

(iv) $P(A \cup B)$ (v) $P_A(B)$

Lösung:

$$(i) \quad P(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$(ii) \quad P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \Rightarrow P(B) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} = \frac{3}{4}$$

$$(iii) \quad P(A \cap B) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38} = 0{,}5526$$

$$(iv) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{21}{38} = \frac{18}{19} = 0{,}9474$$

$$Alternative: \quad P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{18}{19} = 0{,}9474$$

$$(v) \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P_A(B) = \frac{21/38}{3/4} = \frac{14}{19} = 0{,}7368$$

Alternative: Direktes Ablesen aus dem Baumdiagramm

5.) **Beweisen Sie folgende Behauptung**

Für die Ereignisse A und B mit $P(A) \neq 0$ bzw. $P(B) \neq 0$ gilt:

Aus $P_A(B) > P(B)$ folgt $P_B(A) > P(A)$

Lösung:

$$Beh.: \quad P_A(B) > P(B) \quad \Rightarrow \quad P_B(A) > P(A)$$

Beweisführung :

$$P_A(B) > P(B) \quad \xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{Formel}} \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B)$$

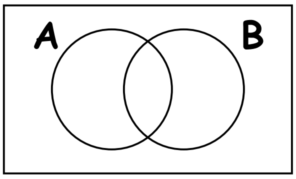
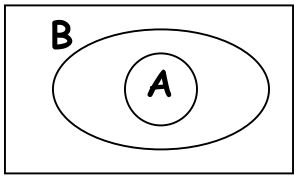
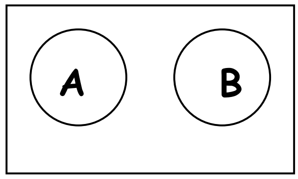
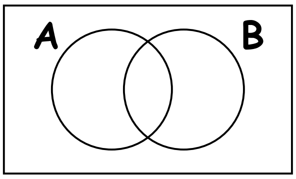
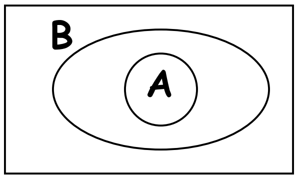
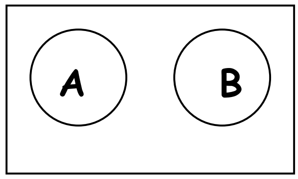
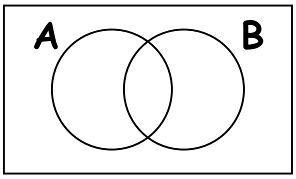
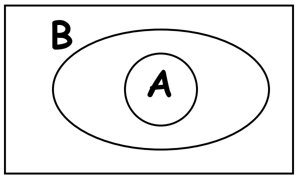
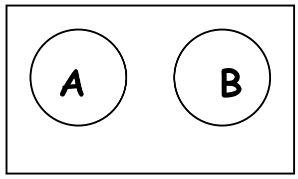
$$\xrightarrow{\cdot P(A)} \quad P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$$

$$\xrightarrow{: P(B)} \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$$

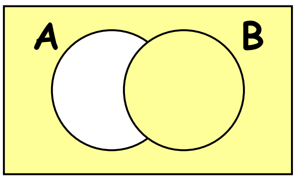
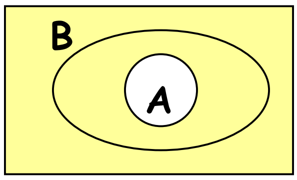
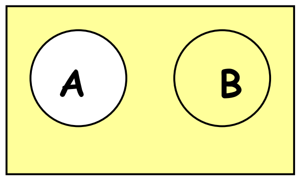
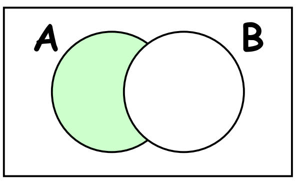
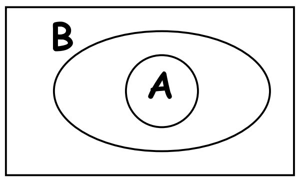
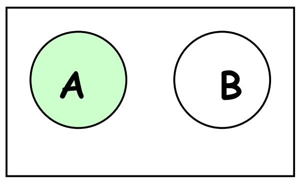
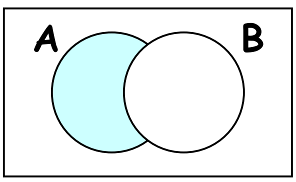
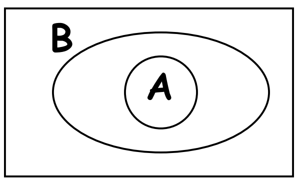
$$\xrightarrow[\text{benutzen}]{\text{Formel}} \quad P_B(A) > P(A)$$

6.) **Ereignisse in Venn-Diagrammen**

Schraffieren Sie jeweils in den folgenden drei Diagrammen die Ereignisse:

$\overline{A} \cup B$			
$A \cap \overline{B}$			
$A \setminus B$			

Lösung:

$\overline{A} \cup B$			
$A \cap \overline{B}$		 ***Leere Menge***	
$A \setminus B$		 ***Leere Menge***