Musterlösung 13. Jgst. 4. Test Datum: 02.03.2007

Klasse: GY 04 c Fach: Mathematik (Leistungsfach)

Themen: alle behandelten Themengebiete aus der Analysis, Linearen Algebra und Stochastik

---

Analysis:

1.) Untersuchung an einer e-Funktion

Gegeben sei die Parameterfunktion

$$f_t(x) \quad = \quad (x-t)e^{\frac{1}{3}x} \quad mit \quad t>0$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle(n)

Lösung: $f_t(x) \quad = \quad (x-t)e^{\frac{1}{3}x} \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x=t$

Der Faktor mit der e-Funktion kann nicht den Wert 0 annehmen.

b) Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung folgende Form annimmt:

$$f_t''(x) \quad = \quad \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}x+2-\frac{1}{3}t\right)$$

Lösung:

$$f_t'(x) \quad = \quad e^{\frac{1}{3}x}+\frac{1}{3}(x-t)e^{\frac{1}{3}x} \quad = \quad e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}x+1-\frac{1}{3}t\right)$$

$$f_t''(x) \quad = \quad \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}x+1-\frac{1}{3}t\right)+\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} \quad = \quad \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}x+2-\frac{1}{3}t\right)$$

c) Ermitteln Sie nun die lokalen Extrema der Funktion.

Lösung:

$$f_t'(x) \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}x+1-\frac{1}{3}t\right) \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}x+1-\frac{1}{3}t \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad t-3$$

Kontrolle ob Max oder Min:

$$f_t''(t-3) \quad = \quad \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}(t-3)}\left[\frac{1}{3}(t-3)+2-\frac{1}{3}t\right] \quad = \quad \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t-1}>0$$

$$\Rightarrow \quad Min\left(t-3 \mid f(t-3)\right) \quad = \quad Min\left(t-3 \;\middle|\; -3e^{\frac{1}{3}t-1}\right)$$

d) Ortskurve der Extrema

Lösung:

$$Min\left(t-3 \;\middle|\; -3e^{\frac{1}{3}t-1} \right)$$

$$x = t-3 \quad \Rightarrow \quad t = x+3$$

$$y = (-3)\cdot e^{\frac{1}{3}t-1} \xrightarrow{t\ einsetzen} y = (-3)\cdot e^{\frac{1}{3}(x+3)-1} = (-3)\cdot e^{\frac{1}{3}x}$$

e) Für welchen Wert von **t** stehen die Wendetangente und die Tangente in der Nullstelle senkrecht aufeinander?

Lösung:

Lösungsidee: Steigung im Wendepunkt und in der Nullstelle berechnen; diese beiden Steigungen zueinander prüfen

Ermittlung der Wendestelle:

$$f_t''(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}x+2-\frac{1}{3}t\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = t-6$$

Steigung an der Wendestelle:

$$f_t'(t-6) = e^{\frac{1}{3}(t-6)}\left[\frac{1}{3}(t-6)+1-\frac{1}{3}t\right] = -e^{\frac{1}{3}t-2}$$

Steigung in der Nullstelle:

$$f_t'(t) = e^{\frac{1}{3}t}\left(\frac{1}{3}t+1-\frac{1}{3}t\right) = e^{\frac{1}{3}t}$$

Prüfen des Steigungsverhaltens: ***die Tangenten müssen zueinander orthogonal sein***

$$\left(-e^{\frac{1}{3}t-2}\right)\cdot e^{\frac{1}{3}t} = (-1) \Rightarrow e^{\frac{2}{3}t-2} = 1 \xrightarrow{\ln} \frac{2}{3}t-2=0 \Rightarrow t=3$$

f) Zeigen Sie mittels Differentialrechnung, dass $F_t(x) = 3 \cdot e^{\frac{1}{3}x} \cdot (x - t - 3)$ eine Stammfunktion zu $f_t(x)$ ist.

Lösung:

$$F_t'(x) = e^{\frac{1}{3}x} \cdot (x - t - 3) + 3 \cdot e^{\frac{1}{3}x} \cdot 1 = e^{\frac{1}{3}x} \cdot \left[(x - t - 3) + 3\right]$$

$$F_t'(x) = e^{\frac{1}{3}x} \cdot (x - t) = f_t(x)$$

g) Extremwertaufgabe für ***t** = 6*

Der Funktionsgraph begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück.

Hierin soll ein Rechteck mit größtmöglicher Fläche gezeichnet werden, wobei ein Eckpunkt im Ursprung und ein anderer Eckpunkt auf dem Graphen der Funktion liegen soll.

Ermitteln Sie die Seitenlängen und die maximale Fläche.

Lösung:

$$A(a,b) = a \cdot b \Rightarrow A(x) = x \cdot f_6(x) = x \cdot (x - 6) e^{\frac{1}{3}x} = \left(x^2 - 6x\right) e^{\frac{1}{3}x}$$

$$\textit{Ableitung}:$$

$$A'(x) = (2x - 6) e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}\left(x^2 - 6x\right) e^{\frac{1}{3}x} = \left(\frac{1}{3}x^2 - 6\right) e^{\frac{1}{3}x}$$

$$A'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^2 - 6\right) e^{\frac{1}{3}x} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

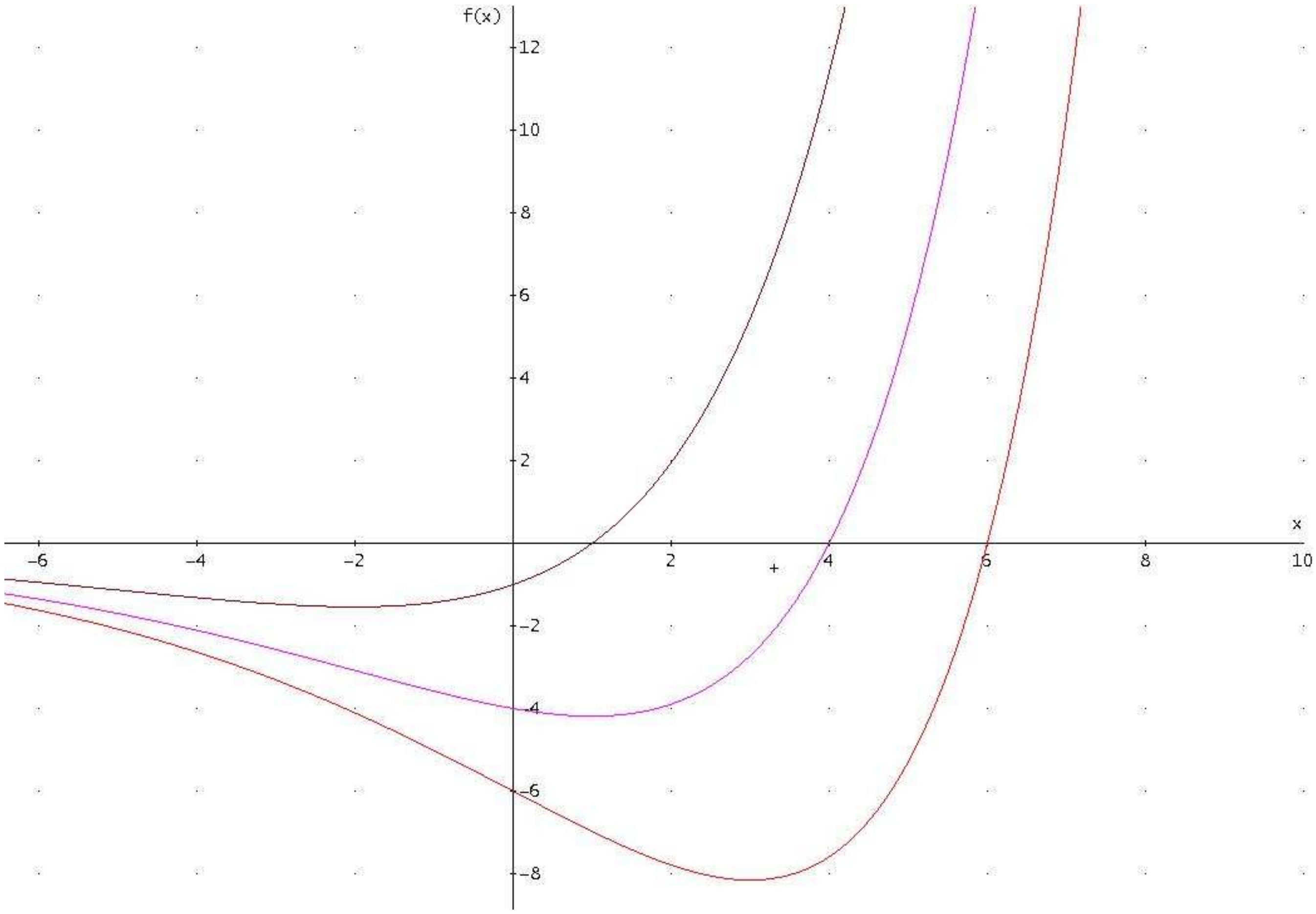
$$\textit{Fläche}:$$

$$A\left(\sqrt{18}\right) = \left|\left(18 - 6 \cdot 3\sqrt{2}\right) e^{\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2}}\right| = 18\left(\sqrt{2} - 1\right) e^{\sqrt{2}} = 30,6677$$

h) Für welche drei Werte von **t** wurde die Funktion hier gezeichnet?

Bitte begründen Sie Ihre Wertangaben!

<u>Lösung:</u> Aufgrund der Nullstellen mit x = **t** kann man erkennen, dass die drei Parameterwerte 1, 4 und 6 verwendet wurden.



2.) Wachstumsfunktion

Gegeben sei folgende Wachstumsfunktion: $w(t) \quad = \quad \dfrac{20 \cdot e^{0,05 \cdot t}}{10 + e^{0,05 \cdot t}}$

a) Wie groß war der Baum im Zeitpunkt t = 0?

Lösung:

$$w(0) \quad = \quad \frac{20 \cdot e^{0,05 \cdot 0}}{10 + e^{0,05 \cdot 0}} \quad = \quad \frac{20}{10+1} \quad = \quad \frac{20}{11} \quad = \quad 1{,}818$$

b) Wie groß wird der Baum im Endstadium werden?

Lösung:

$$\lim_{t \to \infty} w(t) \quad = \quad \lim_{t \to \infty} \frac{20 \cdot e^{0,05 \cdot t}}{10 + e^{0,05 \cdot t}} \quad \overset{L'Hospital}{=} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1 \cdot e^{0,05 \cdot t}}{0,05 \cdot e^{0,05 \cdot t}} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{0,05} = 20$$

c) Ermitteln Sie eine Stammfunktion zu $w(t)$.

Lösung:

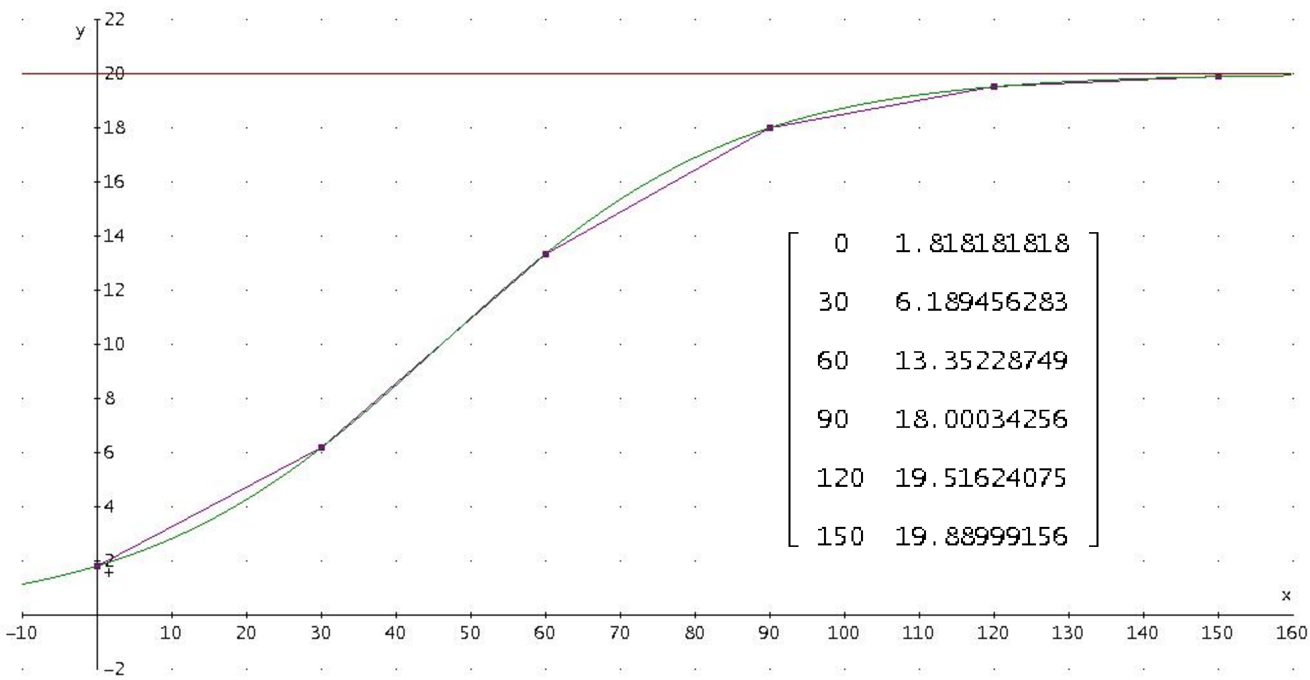
$$\int w(t)\,dt \quad = \quad \int \frac{20 \cdot e^{0,05 \cdot t}}{10 + e^{0,05 \cdot t}}\,dt \quad = \quad 20 \cdot \int \frac{e^{0,05 \cdot t}}{10 + e^{0,05 \cdot t}}\,dt \quad = \quad 400 \cdot \ln\left(10 + e^{0,05 \cdot t}\right) + c$$

d) Wie heißt dieser Wachstumstyp?

Lösung: Logistisches Wachstum

e) Zeichnen Sie die Funktion im Bereich $t \in [0\,;150]$ in „30er-Schritten“.

Lösung:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1.818181818 \\ 30 & 6.189456283 \\ 60 & 13.35228749 \\ 90 & 18.00034256 \\ 120 & 19.51624075 \\ 150 & 19.88999156 \end{bmatrix}$$

Lineare Algebra:

1.) LGS mit Parameter

Gegeben seien die Matrix und A und der Vektor $\vec{b}_t$.

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & -2 \\ t & 2 & 4 \\ -t & 0 & t^2+2t \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ -0,6t \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von **t** besitzt das LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$

(i) keine Lösung? (ii) eine bestimmte Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$$Det(A_t) = \begin{vmatrix} 1 & -t & -2 \\ t & 2 & 4 \\ -t & 0 & t^2+2t \end{vmatrix} = t^4+2t^3+6t^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t=0$$

Probe:

t = 0 ergibt eine Nullzeile $\Rightarrow$ ∞-viele Lösungen

$t \in \Re \backslash \{0\}$ $\Rightarrow$ eindeutige Lösung

b) Bestimmen Sie **t** so, dass die Komponenten $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ des Lösungsvektors das Verhältnis 1 : 2 : 1 besitzen.

Lösung:

Vektor $\vec{x}$ lautet: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x & x \end{pmatrix}$

$$A_t \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -t & -2 \\ t & 2 & 4 \\ -t & 0 & t^2+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2tx-2x \\ tx+4x+4x \\ -tx+t^2x+2tx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2tx \\ 8x+tx \\ t^2x+tx \end{pmatrix}$$

Komponentenvergleich mit Vektor $\vec{b}_t$:

$$\begin{pmatrix} -x-2tx \\ 8x+tx \\ t^2x+tx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ -0,6t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x-2tx=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{1+2t} \\ 8x+tx=-t \\ t^2x+tx=-0,6t \Rightarrow x=-\frac{0,6}{t+1} \end{matrix}$$

Gleichsetzen:

$$-\frac{1}{1+2t} = -\frac{0,6}{t+1} \Rightarrow t+1 = 0,6+1,2t \Rightarrow t=2 \Rightarrow x=-\frac{1}{5}$$

Probe mit Komponente 2:

$$8\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-2 \leftrightarrow -t \qquad \Rightarrow \qquad L_t=\{2\}$$

c) Lösen Sie folgende Matrizengleichung allgemein:

$$A_2\cdot X+\left(X^T\cdot A_0\right)^T = A_1^2$$

Lösung:

$$A_2\cdot X+\left(X^T\cdot A_0\right)^T = A_1^2 \Rightarrow A_2\cdot X+A_0^T\cdot X = A_1^2$$

$$\Rightarrow \left(A_2+A_0^T\right)\cdot X = A_1^2 \Rightarrow X = \left(A_2+A_0^T\right)^{-1}\cdot A_1^2$$

2.) Leontief-Modell

Die Sektoren A, B und C einer Volkswirtschaft sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.

Die Leontief-Inverse ist gegeben durch:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & 3,5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Inputmatrix folgende Form besitzt:

$$A = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Prüfen durch Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{c|c} (E-A)^{-1}\cdot(E-A) & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & 3,5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Der derzeitige Produktionsvektor sei $\vec{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} 120 & 150 & 90 \end{pmatrix}^T$

b) Erstellen Sie für diesen Fall eine komplette Input-Output-Tabelle.

Lösung: Ermittlung des Konsumvektors:

$$Ansatz:$$

$$A\vec{x}+\vec{y} \;=\; \vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{y} \;=\; \vec{x}-A\vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{y} \;=\; (E-A)\cdot\vec{x}$$

$$\begin{array}{c|c} \vec{y} \;=\; (E-A)\cdot\vec{x} & \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 90 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

	A	B	C	$\vec{y}$	$\vec{x}$
A	40	25	30	25	120
B	40	75	15	20	150
C	0	25	60	5	90

Für die kommende Produktionsperiode hat sich die Nachfrage verändert:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}^T$$

c) Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$.

Lösung:

$$\textit{Ansatz:}$$

$$\vec{y} = (E-A)\cdot\vec{x} \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = (E-A)^{-1}\cdot\vec{y}$$

$$\begin{array}{c|c} \vec{x} = (E-A)^{-1}\cdot\vec{y} & \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2 & 3{,}5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

Stochastik:

1.) **Normalverteilung bei Niederschlägen**

Die Zufallsvariable X gebe die Niederschlagsmenge von Ludwigshafen für den Monat März an. Langjährige Aufzeichnungen ergaben, dass die Niederschlagsmenge normalverteilt ist mit dem Mittelwert μ = 75 mm und σ = 5 mm.

Wie hoch sind die Niederschlagsmengen für den kommenden März, wenn die Wahrscheinlichkeit bei höchst. 99 % **im Intervall** um den erwarteten Wert liegt?

Lösung:

$$P(75-c \le X \le 75+c) \le 0{,}99$$

$$\Phi(x)-\Phi(-x) = 2\cdot\Phi(x)-1 \le 0{,}99 \Rightarrow \Phi(x) \le 0{,}995$$

$$\Rightarrow x = 2{,}58$$

$$\textit{Umrechnung:} \quad 2{,}58 = \frac{k-75}{5} \Rightarrow k_1 = 87{,}9 \wedge k_2 = 62{,}1$$

$$\Rightarrow |c| = 12{,}9$$

2.) **Flugplatzdisposition**

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass **mind. 12 %** aller Fluggäste, die einen Platz für einen bestimmten Flug reservieren lassen, nicht zum Abflug erscheinen.

Sie verkauft deshalb 400 Flugscheine für 360 verfügbare Plätze.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Fluggäste einen Platz bekommen?

Lösung:

$$\mu = 400 \cdot 0,88 = 352 \qquad \sigma = \sqrt{352 \cdot 0,12} \approx 6,5$$

$$P(X \leq 360) = \Phi\left(\frac{360 + 0,5 - 352}{6,5}\right) = \Phi(1,31) = 0,905$$

b) Kann man den Erfahrungswert mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % beibehalten, wenn zum Abflug 370 Personen kämen?

Lösung:

$$H_0 : p_0 \leq 0,88 \qquad H_1 : p_1 > 0,88$$

$$P(X - \mu \leq c) \leq (1 - \alpha) \Rightarrow P(X - 352 \leq c) \leq 0,99$$

$$\Rightarrow \Phi(x) \leq 0,99 \Rightarrow x = 2,33$$

$$\Rightarrow X \leq \mu + x \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow X \leq 352 + 2,33 \cdot 6,5 = 367,14$$

$$\Rightarrow X \leq 367$$

$$\Rightarrow A = \{0; ...; 367\} \quad und \quad \overline{A} = \{368; ...; 400\}$$

$$\Rightarrow H_0 \text{ muss verworfen werden.}$$