Musterlösung 13. Jgst. 5. Test Datum: 17.04.2007

Klasse: GY 04 c Fach: Mathematik (Leistungsfach)

Themen: Analysis (gebr.-rat. Parameterfunktionen)
Lineare Algebra (Leontief-Modell)

Analysis: Untersuchung an einer gebr.-rat. Parameterfunktion

Gegeben sei die Parameterfunktion

$$f_t(x) \quad = \quad \frac{tx^2-9}{x-3} \quad mit \quad t \geq 1$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f_t(x)$.

Lösung: $D_f \quad = \quad \Re \setminus \{3\} \qquad wegen \quad x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

b) Berechnen Sie die Nullstelle(n), Polstellen und Lücken.

Unterscheiden Sie hierbei zwei Fälle:
Fall 1: **t = 1** Fall 2: **t > 1**

Lösung:

Fall 1: t = 1

$$f_1(x) \quad = \quad \frac{x^2-9}{x-3} \quad = \quad \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \quad \Rightarrow \quad f^*(x) \quad = \quad x+3$$

=> Nullstelle: x = - 3 und => behebbare Lücke: x = 3

Fall 2: t > 1

$$Zählernullstellen: \quad tx^2-9 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \quad = \quad \frac{3}{\sqrt{t}} \quad (Nullstellen)$$

$$Nennernullstellen: \quad x-3 \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad 3 \quad (Polstelle\ mit\ VZW)$$

c) Beweisen Sie:

Die Funktion $f_t(x)$ besitzt für unterschiedliche Parameter-werte einen gemeinsamen Punkt.

Berechnen Sie auch die Koordinaten dieses Punktes.

Lösung:

$$f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x) \Rightarrow \frac{t_1x^2-9}{x-3} = \frac{t_2x^2-9}{x-3} \xrightarrow{\cdot(x-3)} t_1x^2-9 = t_2x^2-9$$

$$\xrightarrow{+9} t_1x^2 = t_2x^2 \xrightarrow{-t_2x^2} t_1x^2-t_2x^2 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2\ ausklammern} x^2(t_1-t_2) = 0 \xrightarrow[wegen\,(t_1-t_2)\neq 0]{:(t_1-t_2)} x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow S(0\mid 3)$$

d) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen folgende Form annehmen:

$$f_t'(x) = \frac{tx^2-6tx+9}{(x-3)^2} \qquad f_t''(x) = \frac{18(t-1)}{(x-3)^3}$$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{2tx\cdot(x-3)-(tx^2-9)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2tx^2-6tx-tx^2+9}{(x-3)^2} = \frac{tx^2-6tx+9}{(x-3)^2}$$

$$f_t''(x) = \frac{(2tx-6t)\cdot(x-3)^2-(tx^2-6tx+9)\cdot 2(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4}$$

$$f_t''(x) = \frac{(2tx^2-12tx+18t)-(2tx^2-12tx+18)}{(x-3)^3} = \frac{18t-18}{(x-3)^3} = \frac{18(t-1)}{(x-3)^3}$$

e) Ermitteln Sie nun die lokalen Extremwert**stellen** der Funktion in Abhängigkeit des Parameters.
Zeigen Sie hierbei, dass man entweder keinen oder zwei Extremwerte erhalten wird. Fallunterscheidung!

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{tx^2-6tx+9}{(x-3)^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow tx^2-6tx+9 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{6t\pm\sqrt{36t^2-36t}}{2t} = \frac{6t\pm 6\sqrt{t^2-t}}{2t} = 3\pm\frac{3}{t}\sqrt{t(t-1)}$$

$Fall\,1: \quad t = 1$

$x_{1/2} \quad = \quad 3 \pm \frac{3}{1} \cdot 0 \quad = \quad 3 \quad \Rightarrow$ kein Extremwert, da $f(x)$ für x = 3 nicht definiert

$Fall\,2: \quad t > 1$

$x_{1/2} \quad = \quad 3 \pm \frac{3}{t}\sqrt{t(t-1)} \quad \Rightarrow$ zwei Extremwerte

Erläuterung:
Wegen $t \geq 1$ müssen nur die beiden Fälle unterschieden werden; die Situation $t \in [0\,;1[$ ist für den Parameter in der Aufgabenstellung nicht vorgesehen, zudem wäre hierbei die Diskriminante negativ, so dass in diesem Bereich kein Extremwert existierte.

f) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_t(x)$ keine Wendepunkte besitzt.

Lösung:

$$f_t''(x) \quad = \quad \frac{18(t-1)}{(x-3)^3} \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad 18(t-1) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Widerspruch$$

Es existiert kein x-Wert als Lösung der Gleichung!

Bei $t \;=\; 1$ (Sonderfall) existiert allerdings die Funktion: $\quad f_1^*(x) \quad = \quad x+3$

Dies ist aber eine lineare Funktion ohne Wendepunkt.

g) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f_t(x)$.

Anmerkung: Vielleicht ist der Weg zur Bestimmung der Asymptote eine Grundlage für das gesuchte Integral.

Lösung:

$$f_t(x) \quad = \quad \frac{tx^2-9}{x-3} \quad \overset{Polynomdivision}{=} \quad tx + 3t + \frac{9t-9}{x-3}$$

$$F_t(x) \quad = \quad \frac{1}{2}tx^2 + 3tx + (9t-9)\cdot \ln|x-3| + c$$

Lineare Algebra: Leontief-Modell

Die Verflechtung von drei Abteilungen A, B und C eines Unternehmens nach dem Leontief-Modell ist gegeben durch folgende Inputmatrix **A**.

$$A = \frac{1}{50}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 6 & 7 \\ 5 & 22 & 9 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

a) Für welchen Wert des Parameters a, stellt die folgende Matrix die Leontief-Inverse zu A dar?

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 3 & 21 & 7 \\ 1 & 7 & 19 \end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

$$A = \frac{1}{50}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 6 & 7 \\ 5 & 22 & 9 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (E-A) = \begin{pmatrix} \frac{35}{50} & -\frac{6}{50} & -\frac{7}{50} \\ -\frac{5}{50} & \frac{28}{50} & -\frac{9}{50} \\ 0 & -\frac{10}{50} & \frac{30}{50} \end{pmatrix}$$

$$Ansatz: \begin{pmatrix} \frac{35}{50} & -\frac{6}{50} & -\frac{7}{50} \\ -\frac{5}{50} & \frac{28}{50} & -\frac{9}{50} \\ 0 & -\frac{10}{50} & \frac{30}{50} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 3 & 21 & 7 \\ 1 & 7 & 19 \end{pmatrix}$$

Auswahl von Zeile 1 und Spalte 1:

$$\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{35\cdot 15}{50}-\frac{6\cdot 3}{50}-\frac{7\cdot 1}{50}\right) \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{50a}\cdot 500 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{10}$$

b) Der Marktvektor sei gegeben durch $\vec{y} = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 12 \end{pmatrix}^T$.

Wie hoch war die Gesamtproduktion der drei Abteilungen, wenn nur in ganzen Stückzahlen produziert wurde.

Lösung:

$$Ansatz: \quad \vec{x} = (E-A)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 3 & 21 & 7 \\ 1 & 7 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34,5 \\ 50,1 \\ 36,7 \end{pmatrix} \overset{ganzz.}{=} \begin{pmatrix} 35 \\ 51 \\ 37 \end{pmatrix}$$

c) Für das kommende Quartal ist geplant, dass die Abteilung B 30 ME mehr und die Abteilung C 30 ME weniger als die Abteilung A herstellt.

Zudem hat die Marktforschung ergeben, dass die Güter von Abteilung C am Markt nicht mehr absetzbar sind.

Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$ und den Marktvektor $\vec{y}$.

Lösung:

$$Ansatz: \quad \vec{y} = (E-A) \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 35 & -6 & -7 \\ -5 & 28 & -9 \\ 0 & -10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x+30 \\ x-30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{5}\cdot(x+30)+\frac{3}{5}\cdot(x-30) \quad \Rightarrow 0 = \frac{2}{5}x-24 \quad \Rightarrow x = 60$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{50}\cdot(35\cdot 60-6\cdot 90-7\cdot 30) = 27$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{50}\cdot(-5\cdot 60+28\cdot 90-9\cdot 30) = 39$$