Musterlösung **11. Jgst.** **2. Test** **Datum: 24.11.2006**

Klasse: GY 06 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Ganzrat. Funktionen vom Grad n mit Parametern, Grenzwerte, Symmetrie, Achsenschnittstellen; Gebr.-rat. Fkt.**

---

❶ Ganzrat. Funktionen vom Grad n

Ermitteln Sie die Nullstellen **und** die Schnittstelle mit der y-Achse bei folgenden Funktionen:

a) $8x^2 - 24x = 0$ b) $4x^2 + 20x + 24 = 0$

c) $\left(x^2+5\right)^2 - 4x^2 = 0$ d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

<u>Lösung:</u>

a) Nullstellen:

$$8x^2 - 24x = 0 \xrightarrow{\text{ausklammern}} 8x\left(x-3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 3$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f\left(0\right) = 0 \Rightarrow S_y\left(0 \mid 0\right)$

b) Nullstellen:

$$4x^2 + 20x + 24 = 0 \xrightarrow{:4} x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{abc-Formel} x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm 1}{2}$$

$$\xrightarrow{Lösung} x_1 = -2 \vee x_2 = -3$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f\left(0\right) = 24 \Rightarrow S_y\left(0 \mid 24\right)$

c) Nullstellen:

$$\left(x^2+3\right)^2 + 4x^2 = 0 \xrightarrow{\substack{ausmulti- \\ plizieren}} x^4 + 6x^2 + 9 + 4x^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\substack{zusammen- \\ fassen}} x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow[x^2 := u]{Substitution} u^2 + 10u + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{abc-Formel} \quad u_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2}$$

$$\xrightarrow{Lösung} \quad u_1 = -9 \quad \vee \quad u_1 = -1$$

$\Rightarrow$ keine Lösung, da $x^2 = -9$ *und* $x^2 = -1$ nicht definiert sind.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 9 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid 9)$

d) Nullstellen:

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{Horner-Schema}]{x=1} \quad (x-1)(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{Horner-Schema}]{x=-2} \quad (x-1)(x+2)(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{-2; 1; 4\}$$

	A	B	C	D	E	F
1			Horner-Schema			
2		f(x) =	1,00 x^3	-3,00 x^2	-6,00 x	8,00
3						
4	x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
5		1,00	-3,00	-6,00	8,00	
6	1		1,00	-2,00	-8,00	
7		1,00	-2,00	-8,00	0,00	Nullstelle 1
8	-2		-2,00	8,00		
9		1,00	-4,00	0,00		Nullstelle 2
10	4		4,00			
11		1,00	0,00			Nullstelle 3

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 8 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid 8)$

❷ Quadratische Funktionen mit Parameter

Gegeben sei die Parameterfunktion $f_t(x) = x^2 - 6x + t$.

Bei der Nullstellenberechnung erhält man folgendes Zwischenergebnis: $x_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-4t}}{2}$

Für welche Werte des Parameters hat die Funktion

a) eine Nullstelle? b) zwei Nullstellen?

c) keine Nullstellen?

Lösung:

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4t}}{2} \xrightarrow{\text{Diskriminante = 0}} 36 - 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9$$

$\Rightarrow$ Für t = 9 gibt es eine Lösung.

$36 - 4t > 0 \quad \Rightarrow \quad t < 9 \quad \Rightarrow$ Für t < 9 gibt es zwei Lösungen.

$36 - 4t < 0 \quad \Rightarrow \quad t > 9 \quad \Rightarrow$ Für t > 9 gibt es keine Lösung.

❸ Symmetrie

Ermitteln Sie **analytisch** die Symmetrieeigenschaft folgender Funktionen:

a) $f(x) = x^4 - 6x^3$ b) $g(x) = 2x^3 - 4x$

c) Wann ist eine ganzrationale Funktion achsensymmetrisch?

Lösung:

a)

$$f(-x) = (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^3 = x^4 + 6x^3 \quad \neq \quad f(x) \quad und \quad \neq \quad -f(x)$$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie

b)

$$g(-x) \quad = \quad 2\cdot(-x)^3 - 4\cdot(-x) \quad = \quad -2x^3 + 4x \quad = \quad -g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Punktsymmetrie}$$

c) Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch, wenn eine gerade Funktion vorliegt, d.h. alle Exponenten sind gerade.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \quad = \quad f(x)$$

❹ **Gebrochen-rationale Funktionen**

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 1} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{4x^3 - x}{2x^3 + x^2}.$$

a) Bestimmen Sie für die der beiden Funktionen jeweils die Asymptote und den Grenzwert für $x \to \infty$.

<u>Lösung:</u>

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 1} \quad \xrightarrow{\text{Polynomdivision}} \quad (x^2 - 6x + 3):(x - 1) \quad = \quad x - 5 - \frac{2}{x - 1}$$

$$\text{Asymptote}: \quad a(x) \quad = \quad x - 5 \qquad \text{Grenzwert}: \quad \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \to \quad \infty$$

$$g(x) = \frac{4x^3 - x}{2x^3 + x^2} \quad \xrightarrow{\text{ausklammern: } x^3} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x}\right)} \quad = \quad \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} \quad \to \quad 2$$

$$\text{Asymptote}: \quad a(x) \quad = \quad 2 \qquad \text{Grenzwert}: \quad \lim_{x \to \infty} g(x) \quad \to \quad 2$$

Nun sei die Funktion $h(x) = -2 + \frac{4}{4x-8}$ gegeben.

b) Für welche Werte $x \in \Re$ hat die Funktion von ihrer Asymptote einen

kleineren Abstand als $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

Bitte mit Fallunterscheidung!

<u>Lösung:</u>

$$Ansatz: \quad \left| h(x) - g \right| \le \varepsilon$$

$$\left| -2 + \frac{4}{4x-8} - (-2) \right| \le \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{4}{4x-8} \right| \le \frac{1}{100}$$

$$Fall\,1: \quad \frac{4}{4x-8} \quad > \quad 0$$

$$\frac{4}{4x-8} \le \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad 400 \le 4x-8 \quad \Rightarrow \quad 408 \le 4x \quad \Rightarrow \quad 102 \le x$$

$$Fall\,2: \quad \left| \frac{4}{4x-8} \right| \quad < \quad 0$$

$$-\frac{4}{4x-8} \le \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad -400 \ge 4x-8 \quad \Rightarrow \quad -392 \ge 4x \quad \Rightarrow \quad -98 \ge x$$