Musterlösung **11. Jgst.** **2. Test** **Datum: 30.11.2007**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **LGS, ganzrationale Funktionen höheren Grades, Horner-Schema, gebrochen-rat. Funktionen, Ökonom. Anwendungen**

1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende reelle Funktion:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten und begründen Sie.

b) Berechnen Sie die Nullstellen.

c) Wie lautet der Schnittpunkt mit der y-Achse?

d) Geben Sie **zwei Gründe**, warum der Graph unten nicht f(x) sein kann und erstellen die korrekte Skizze der Funktion aufgrund Ihrer obigen Ergebnisse.

Lösung:

a) keine Symmetrie, weil gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

$$f(-x) = (-x)^3 - 5(-x)^2 + 7(-x) - 3$$
$$f(-x) = -x^3 - 5x^2 - 7x - 3 \neq f(x) \; und \neq -f(x)$$

b) Nullstellen:

Schritt 1: Horner-Schema mit x = 1:

	f(x) =	1,00 x^3	-5,00 x^2	7,00 x	-3,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-5,00	7,00	-3,00	
1		1,00	-4,00	3,000	
	1,00	-4,00	3,00	0,000	f(x0)

Schritt 2: Lösung des quadratischen Restterms:

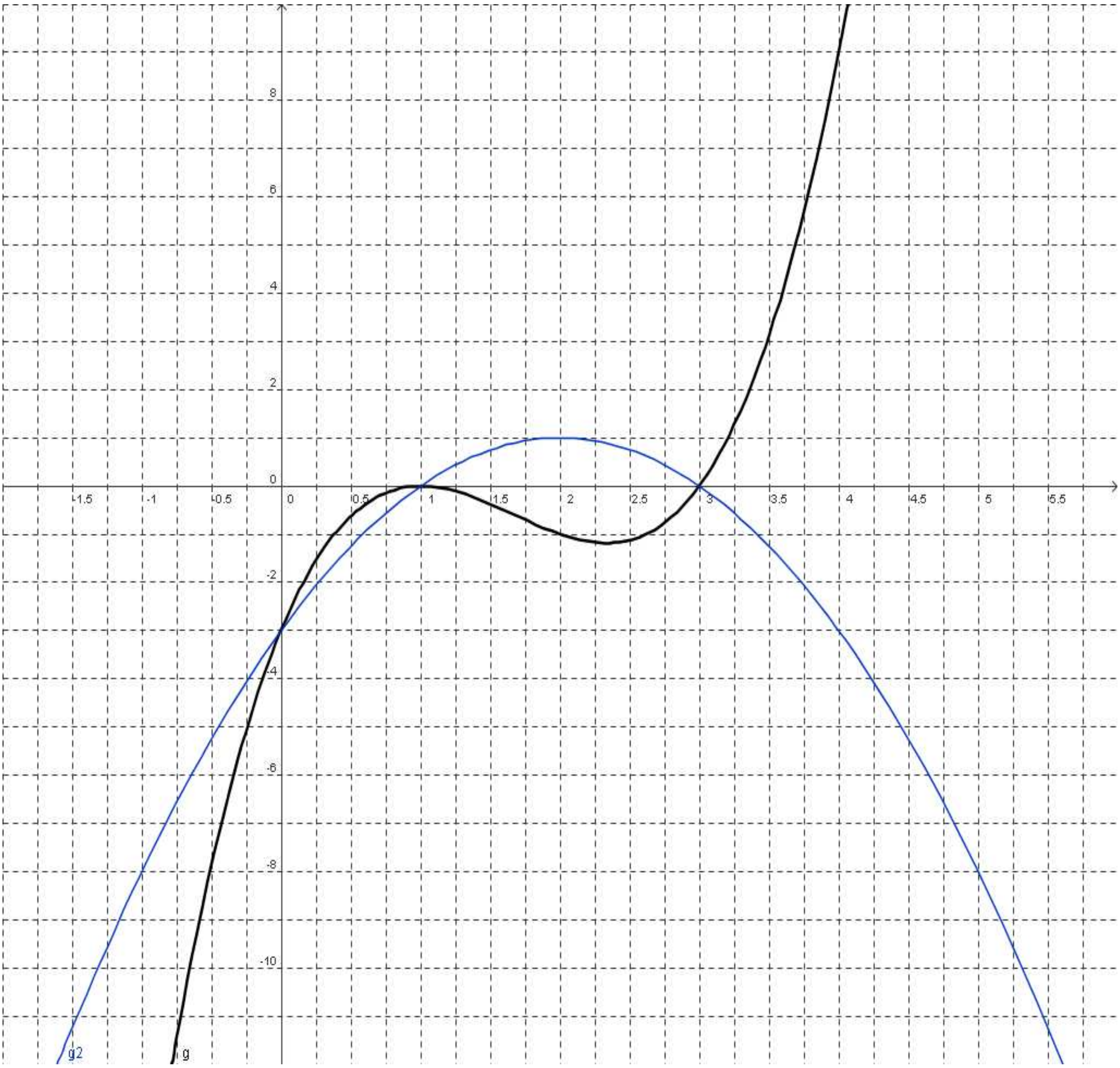
$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \wedge x_3 = 3$$

$$Ergebnis: \quad f(x) = (x-1)^2 (x-3)$$

c) $S_y(0 \mid -3)$

d) (i) x = 1 ist keine doppelte Nullstelle.

(ii) Der Ausschnitt deutet auf eine quadratische Funktion hin.



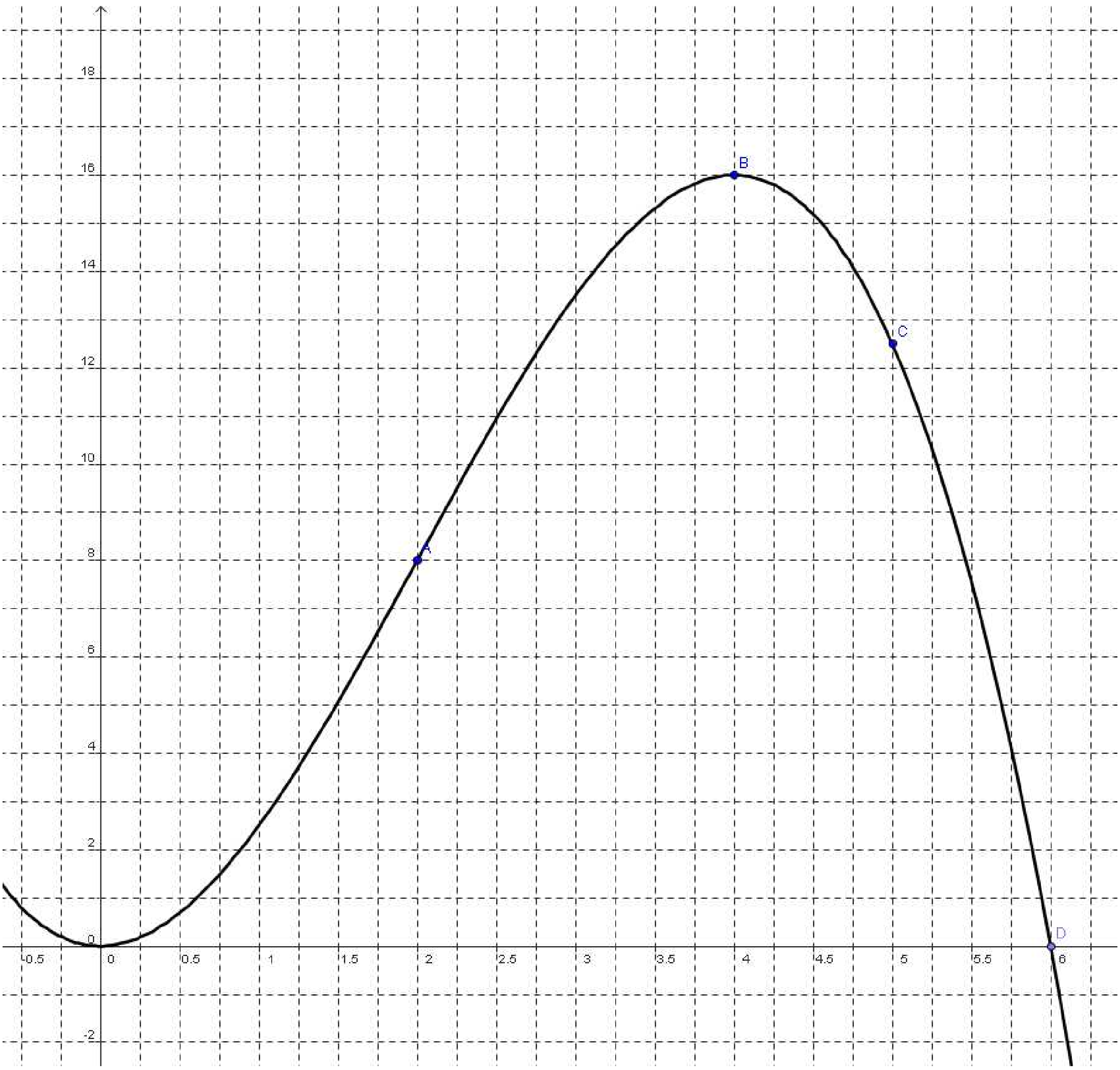
2.) Ermitteln einer ganzrationalen Funktion vom Grad n = 3

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion dritten Grades deren Graph durch die gegebenen Punkte verläuft:

$$A(2 \mid 8), B(4 \mid 16), C(5 \mid 12{,}5) \quad und \quad D(0 \mid 0)$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & 8a+4b+2c+d=8 \\ II.) & 64a+16b+4c+d=16 \\ III.) & 125a+25b+5c+d=12{,}5 \\ IV.) & d=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad a=-0{,}5 \quad b=3 \quad c=d=0 \\ \Rightarrow \quad f(x)=-0{,}5x^3+3x^2 \end{array}$$



3.) Ökonomische Anwendungen

Gegeben sind die Kostenfunktion $k(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$

und die Preis-Absatz-Funktion $p_N(x) = -7x + 49$

a) Bestimmen Sie die Erlösfunktion.

b) Wie lautet der ökonomische Definitionsbereich.

c) Wo liegt die Gewinnschwelle?

d) Berechnen Sie den maximalen Erlös.

Lösung:

a)

$$p_N(x) = -7x + 49 \xrightarrow{p_N(x)\cdot x} E(x) = (-7x+49)\cdot x = -7x^2 + 49x$$

b)

$$E(x) = (-7x+49)\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad D_{ök} = [0\,;7]$$

c)

$$G(x) = E(x) - k(x) \xrightarrow{p_N(x)\cdot x} G(x) = -7x^2 + 49x - \left(x^3 - 6x^2 + 15x + 32\right)$$

$$G(x) = -x^3 - x^2 + 34x - 32 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -1 + \sqrt{33} \quad \wedge \quad x_3 = -1 - \sqrt{33}$$

Die Gewinnschwelle liegt bei x=1; x_2 ist die Gewinngrenze;

x_3 ist nicht im ökonomischen Definitionsbereich.

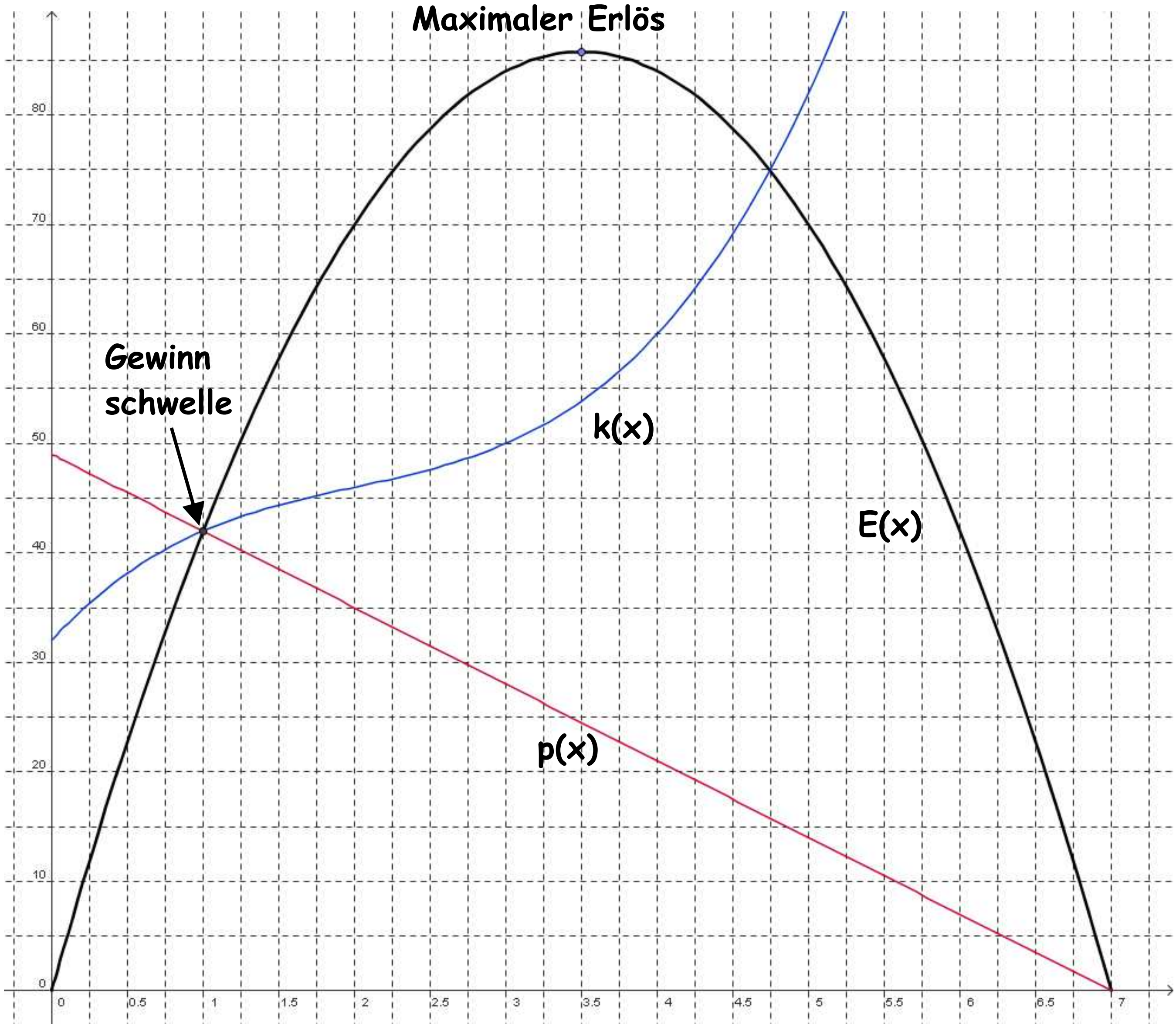
d)

$$E(x) = (-7)\cdot\left[x^2 - 7x + 3{,}5^2 - 3{,}5^2\right] = (-7)\cdot\left[(x-3{,}5)^2 - 12{,}25\right]$$

$$E(x) = (-7)\cdot(x-3{,}5)^2 + 85{,}75$$

$$S(3{,}5 \mid 85{,}75) \quad \Rightarrow \quad E_{Max}(3{,}5) = 85{,}75$$

Zeichnung zu den Ergebnissen:



4.) Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen

a) Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich ihrer Asymptote, Polstellen, Nullstellen und ihres Schnittpunktes mit der y-Achse:

$$g(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 9}$$

b) Fertigen Sie eine Skizze der Funktion mit Polstellen und Asymptote an.

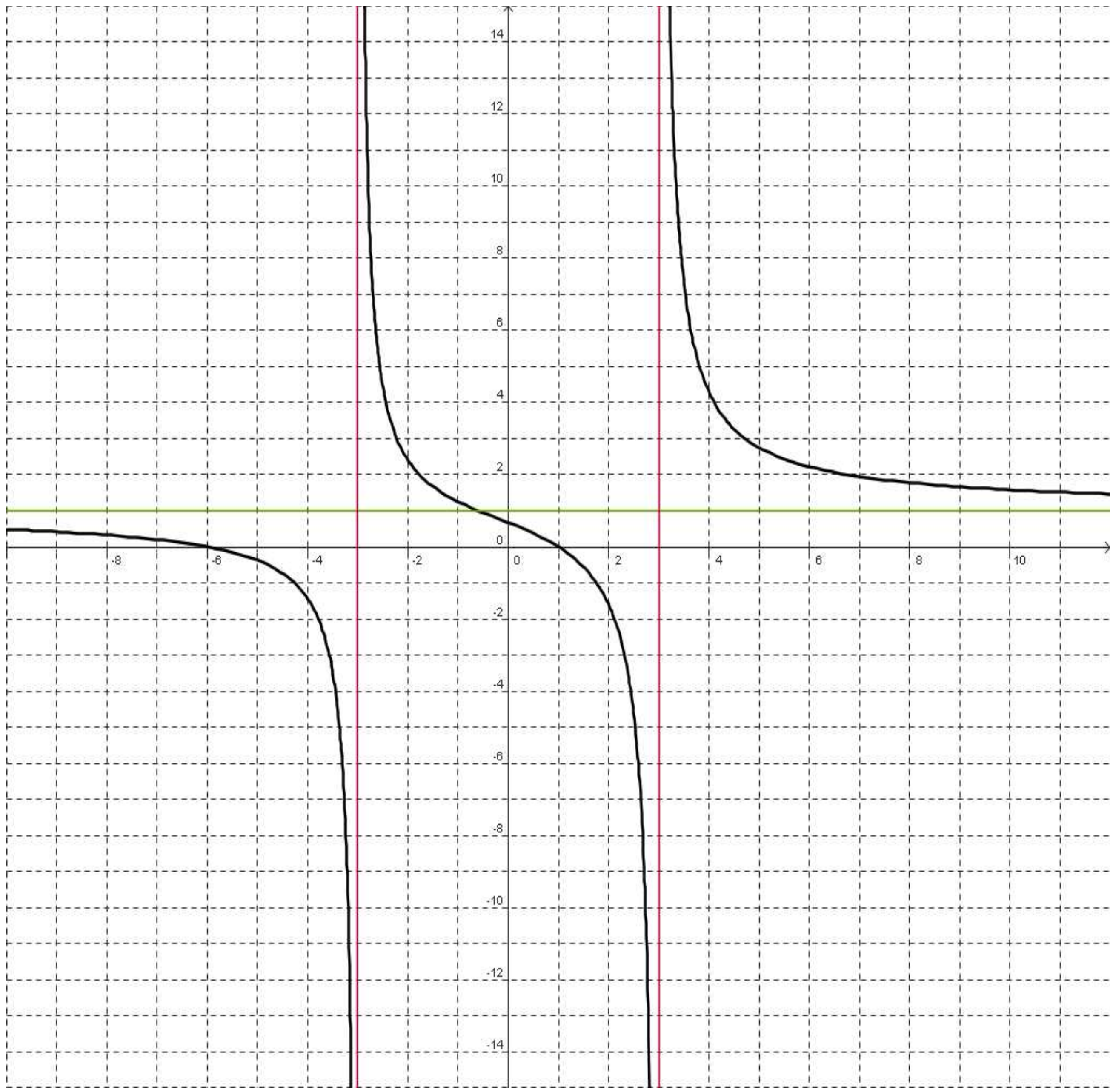
Lösung:

Asymptote: a(x) = 1

Polstellen: $Nennernullstellen: \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 3$

Nullstellen: $Z\ddot{a}hlernullstellen: \quad x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = -6$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\left(0 \;\middle|\; \frac{2}{3}\right)$



5.) Zuordnung: Funktion - Graph

Gegeben seien drei Funktionsvorschriften f1 bis f3 und ein Graph.

$$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4} \qquad f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4} \qquad f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$$

Zu welcher der drei Funktionsvorschriften passt der Graph?

=> ***Begründen Sie die Entscheidung aufgrund der Nullstellen, der Asymptote und der und Polstellen!***

=> ***Ergänzen Sie zudem noch die Asymptote und die Polstelle (Polgerade).***

Lösung:

Kriterium	$f1(x) = \frac{2-4x}{2x-4}$	$f2(x) = \frac{2+4x}{2x-4}$	$f3(x) = \frac{2-4x}{2x+4}$
Asymptote	a(x) = - 2	**a(x) = 2**	a(x) = - 2
Nullstellen	x = 0,5	**x = - 0,5**	x = 0,5
Polstelle(n)	x = 2	**x = 2**	x = - 2
Schnitt y-Achse	$S_y(0 \mid -0{,}5)$	$S_y(0 \mid -0{,}5)$	$S_y(0 \mid 0{,}5)$