Musterlösung **11. Jgst.** **3. Test** **Datum: 08.02.2008**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Geometrische Folgen und Reihen; Finanzmathematik (Zinsen und Renten)

1.) Geometrische Folge

a) Ermitteln Sie das 17. Glied einer geometrischen Folge, die mit den Gliedern 1, 3, 9 beginnt.

Geben Sie auch das Bildungsgesetz an.

Lösung: $f(n) = 1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow f(17) = 1 \cdot 3^{16} = 43.046.721$

b) Das erste Glied einer geometrischen Folge heißt 5, das letzte 5.120 und der Quotient 2.

Aus wie viel Gliedern besteht die Folge?

Lösung:

$$5.120 = 5 \cdot 2^{n-1} \xrightarrow{:5} 1.024 = 2^{n-1} \xrightarrow{\ln} n = 11$$

c) Schalten Sie zwischen 4 und 62.500 noch fünf Glieder so ein, dass eine geometrische Folge entsteht.

Geben Sie auch das Bildungsgesetz an.

Lösung:

$$62.500 = 4 \cdot q^{7-1} \xrightarrow{:4} 15.625 = q^{6} \xrightarrow{\sqrt[6]{\ }} 5 = q$$

$$\Rightarrow \quad 4 \quad 20 \quad 100 \quad 500 \quad 2.500 \quad 12.500 \quad 62.500$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = 4 \cdot 5^{n-1}$$

2.) Geometrische Folge bei Bakterien

Fünf Bakterien teilen sich jeweils alle 20 Minuten einmal, wenn sie einen geeigneten Nährboden finden.

a) Füllen Sie die Tabelle zum Bakterienwachstum aus:

Zeit [Min]	**0**	**20**	**40**	**60**
Anzahl	5	10	20	40

b) Wie lautet das Bildungsgesetz?

Lösung: $f(n) = 5 \cdot 2^{n-1}$

c) Wie viele Zellen haben sich nach 5 Stunden entwickelt?

<u>Lösung:</u> $f(16) = 5 \cdot 2^{16-1} = 163.840$

3.) Für Bodenuntersuchungen werden Bohrarbeiten an eine Spezialfirma vergeben, die für den ersten Meter 15,00 € und für jeden weiteren Meter 5 % mehr als für den jeweils vorhergehenden Meter verlangt.

Mit welchen Kosten muss der Auftraggeber **<u>insgesamt</u>** rechnen, wenn 5 m tief gebohrt werden soll?

<u>Lösung:</u>

$$a_n = 15 \cdot 1{,}05^{n-1} \quad und \quad s_n = 15 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad s_5 = 15 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05 - 1} = 82{,}88\,[€]$$

Bereich Finanzmathematik

4.) Füllen Sie die Tabelle auf Grundlage der ganzjährigen Verzinsung aus:

Aufgabe	Anfangskapital	Zinssatz	Laufzeit	Endkapital
a)	25.000,00	4 %	6 Jahre	
b)		3,75 %	14 Jahre	7.634,81
c)	5.800,00		4 Jahre	7.049,94
d)	18.500,00	6,25 %		31.925,09

<u>Lösung:</u> a) $K_6 = 25.000{,}00 \cdot 1{,}04^6 = 31.632{,}98$

b) $K_0 = \dfrac{7.634{,}81}{1{,}0375^{14}} = 4.560{,}00$

c) $q = \sqrt[4]{\dfrac{7.049{,}94}{5.800{,}00}} = 1{,}05 \Rightarrow p = 5\,[\%]$

d) $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{31.925{,}09}{18.500{,}00}\right)}{\ln 1{,}0625} = 9\,[Jahre]$

5.) a) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital, das mit 8 % p.a. bei vierteljährlicher Zinszahlung verzinst wird?

Lösung:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1+\frac{8}{100 \cdot 4}\right)^{4n} \xrightarrow{:K_0} 2 = 1{,}02^{4n}$$

$$\xrightarrow{\ln} \ln 2 = 4n \cdot \ln 1{,}02 \xrightarrow{:(4 \cdot \ln 1{,}02)} n = \frac{\ln 2}{4 \cdot \ln 1{,}02}$$

$$\Rightarrow n = 8{,}75\,[Jahre] = 8\,[Jahre]\,9\,[Monate]$$

b) Wie hoch ist der Effektivzinssatz?

Lösung: $$q_{eff} = \left(1+\frac{8}{100 \cdot 4}\right)^{4} = 1{,}08243 \Rightarrow p_{eff} = 8{,}243\,[\%]$$

6.) Ein Angestellter zahlt bei einer Rentenanstalt 30 Jahre lang jährlich je 1.200,00 € **nachschüssig** bei einem Zinssatz von 4 % ein.

Welcher Betrag steht ihm nach 30 Jahren zur Verfügung?

Lösung: $$R_{30} = 1.200{,}00 \cdot \frac{1{,}04^{30}-1}{0{,}04} = 67.301{,}93$$

7.) Der Barwert einer über 10 Jahre laufenden **nachschüssigen** Jahresrente unter Berücksichtigung einer jährlichen Verzinsung von 4 % beträgt 32.443,58 €.

Welcher Betrag wird jährlich an den Renteninhaber ausgezahlt?

Lösung:

$$Ansatz: \quad 32.443{,}58 \cdot 1{,}04^{10} = r \cdot \frac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04}$$

$$\Rightarrow r = \frac{32.443{,}58 \cdot 1{,}04^{10}}{\frac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04}} = \frac{48.024{,}42}{12{,}006} = 4.000{,}00$$