Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 16.05.2008**

Klasse: GY 07 d **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Stetigkeit und Differenzierbarkeit; Ableitungen; Extremwerte von Fkt.

1.) Stetigkeit **bei Parameterfunktionen**

Gegeben sie die Funktion $f_k(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & \text{für } x < -2 \\ -8x - 3 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$

Für welchen Wert von k ist $f_k(x)$ stetig?

Lösung:

$$\textit{linke Seite}: \lim_{\substack{x \to -2-h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2-h \\ h \to 0}} \left(x^2 - 4x + k\right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \left[(-2-h)^2 - 4(-2-h) + k\right] = 12 + k$$

$$\textit{rechte Seite}: \lim_{\substack{x \to -2+h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2+h \\ h \to 0}} (-8x - 3) = \lim_{h \to 0} \left[-8(-2+h) - 3\right] = 13$$

$$\Rightarrow \quad 12 + k = 13 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

2.) **Multiple Choice**

a) Die Ableitung einer Funktion ist

☐ eine Gleichung? ☐ eine Zahl?

☒ eine Funktion? ☐ eine Zeichnung?

b) Die Ableitung einer Funktion in einem Punkt ist

☐ eine Gleichung? ☒ eine Zahl?

☐ eine Funktion? ☐ eine Zeichnung?

c) Die Ableitung hängt eng mit ***folgenden Begriffen*** zusammen:

☐ Stetigkeit ☒ Differenzierbarkeit

☒ Steigung ☐ Nullstelle der Funktion

d) Ist die Ableitung einer Funktion überall Null,
so ist die Funktion notwendigerweise

☐ eine Parabel. ☒ konstant.

☐ selbst auch Null. ☐ linear.

e) Eine Funktion ist nicht differenzierbar, wenn ihr Graph

- ☒ Sprungstellen hat.
- ☐ Teil einer Parabel ist.
- ☐ stetig ist.
- ☐ keine Knickstellen besitzt.

3.) Differentialquotient

Differenzieren Sie $f(x) = x^2 + 1$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - x^2 - 1}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

4.) Ableitungen mittels Potenzregel

Bilden Sie die erste Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f_k(x) = 3x^4 - 6x^k + 2k$ b) $f(x) = \sqrt{x^3}$

Lösung:

a) $f_k(x) = 3x^4 - 6x^k + 2k \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 12x^3 - 6kx^{k-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

5.) Steigungen ermitteln

Welche Steigungen hat die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{für } x < 1 \\ 4x^3 - 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

an den Stellen x = 0 und x = 2 ?

Lösung: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x < 1 \\ 12x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

=> $f'(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ $f'(2) = 12 \cdot 2^2 = 48$

6.) Extremwerte, Tangenten und Monotonie

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ auf

a) Extremwerte b) Monotonieintervalle

c) Tangentengleichung in den Extremwerten

Lösung:

a) Extremwerte:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}x - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 4$$

$$f''(x) = 3x - 6$$

$$\Rightarrow f''(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(4) = 3 \cdot 4 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow Min(4 \mid -16)$$

b) Monotonieintervalle:

$$I_1 = \left]-\infty ; 0\right[\Rightarrow \textit{streng monoton steigend}$$

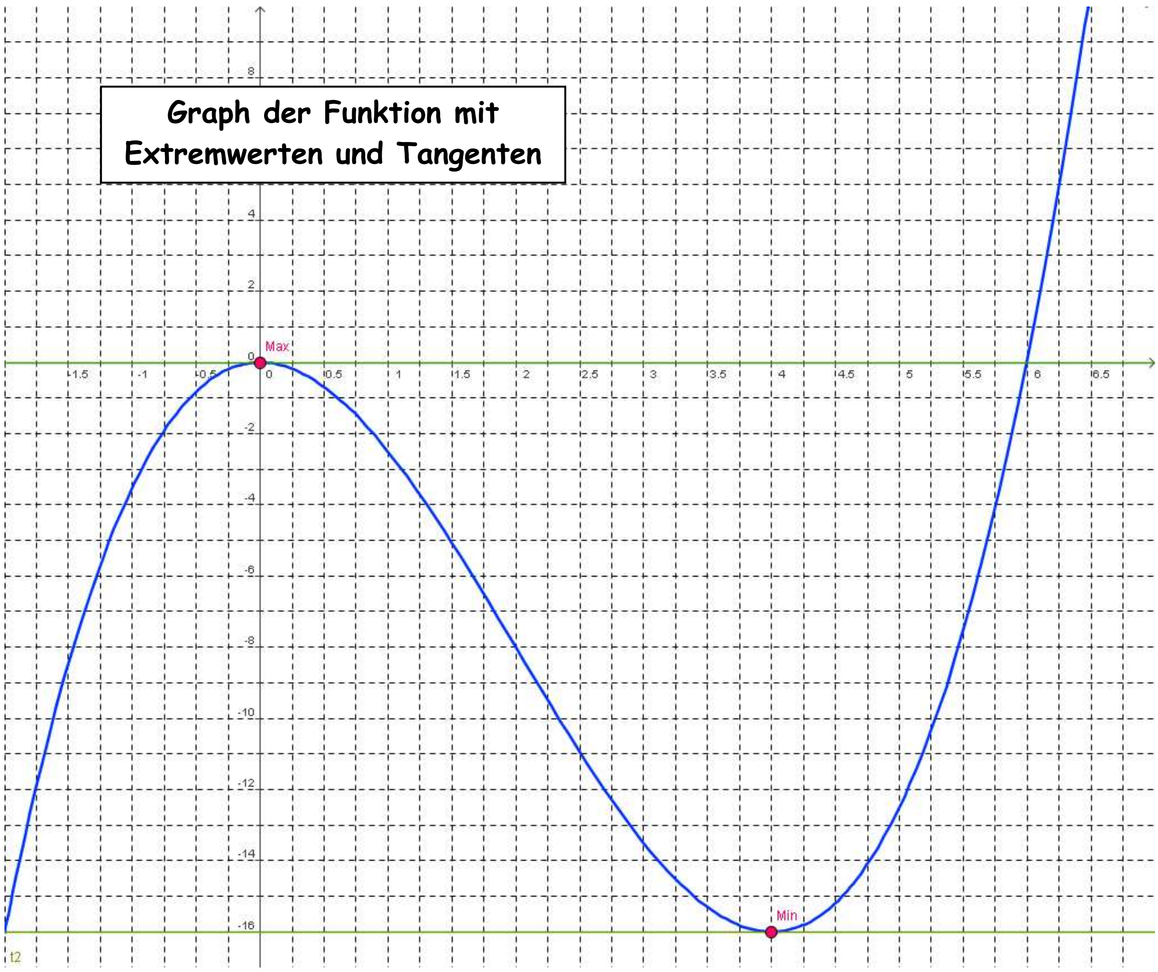
$$I_2 = \left]0 ; 4\right[\Rightarrow \textit{streng monoton fallend}$$

$$I_3 = \left]4 ; \infty\right[\Rightarrow \textit{streng monoton steigend}$$

c) Tangentengleichungen:

$$t_1(x) = 0 \Rightarrow x - Achse$$

$$t_2(x) = -16 \Rightarrow Parallele\ zur\ x - Achse$$



7.) Von der Ableitung zur Funktion

Wie lautet die jeweilige Funktion $f(x)$ **?**

a) $f'(x) = 2x^2$

b) $f'(x) = x^4$

c) $f'(x) = 3$

d) $f'(x) = 8x$

Lösung:

a) $$f'(x) = 2x^2 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = \frac{2}{3}x^3 + c$$

b) $$f'(x) = x^4 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = \frac{1}{5}x^5 + c$$

c) $$f'(x) = 3 \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = 3x + c$$

d) $$f'(x) = 8x \xrightarrow[\text{"Aufleitung"}]{\text{Stammfunktion}} f(x) = 4x^2 + c$$