

1.) Stellen Sie folgende Mengen als Intervall dar

- | | | |
|----|--|-----------------------|
| a) | $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ | $A =] -\infty; 2 [$ |
| b) | $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6\}$ | $B = [-1; 6]$ |
| c) | $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ | $C = [3; \infty [$ |
| d) | $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8 \wedge x \leq -4\}$ | $D =] -\infty; -4]$ |
| e) | $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \wedge x \geq 0\}$ | $E = [0; 5 [$ |
| f) | $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \wedge x > 3\}$ | $F = \{ \}$ |

2.) Bruchterme

- | | | | |
|----|--------------------------------------|----|---|
| a) | $\frac{2m+n}{3a} - \frac{3m-4n}{7a}$ | b) | $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$ |
|----|--------------------------------------|----|---|

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{2m+n}{3a} - \frac{3m-4n}{7a} &\xrightarrow{\text{HN: } 21a} \frac{14m+7n}{21a} - \frac{9m-12n}{21a} \\ &= \frac{14m+7n-(9m-12n)}{21a} = \frac{5m+19n}{21a} \end{aligned}$$

- b)
- $$\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} &\xrightarrow{\text{HN: } (a-b)^2} \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{(a-b)^2} - \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} \\ &= \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2-b^2-(a^2+b^2)}{(a-b)^2} = \frac{-2b^2}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

3.) Lineare (Un-)Gleichungen

$$\text{a)} \quad \frac{2ax-3}{x} - 4a = 1$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{2ax-3}{x} - 4a &= 1 \xrightarrow{\cdot x} 2ax-3-4ax = x \Rightarrow -2ax-x = 3 \\ \Rightarrow (-2a-1)x &= 3 \Rightarrow x = \frac{3}{-2a-1} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad 3ax+2x-4 = -ax+2$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 3ax+2x-4 &= -ax+2 \Rightarrow 4ax+2x = 6 \Rightarrow 2x(2a+1) = 6 \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{2a+1} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \frac{x+4}{x-1} > 2$$

Lösung:

Fall 1:

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

und:

$$\frac{x+4}{x-1} > 2 \quad \left| \cdot (x-1) \right.$$

$$\Rightarrow x+4 > 2x-2$$

$$\Rightarrow 6 > x$$

$$L =]1; 6[$$

Fall 2:

$$x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

und:

$$\frac{x+4}{x-1} > 2 \quad \left| \cdot (x-1) \right.$$

$$\Rightarrow x+4 < 2x-2$$

$$\Rightarrow 6 < x$$

$$L = \{ \}$$

$$d) \quad \frac{2x-6}{3x+12} > 0$$

Lösung:

Fall 1:

$$3x+12 > 0 \Rightarrow x > -4$$

und:

$$\frac{2x-6}{3x+12} > 0 \quad \left| \cdot (3x+12) \right.$$

$$\Rightarrow 2x-6 > 0$$

$$\Rightarrow x > 3$$

$$L =]3; \infty[$$

Fall 2:

$$3x+12 < 0 \Rightarrow x < -4$$

und:

$$\frac{2x-6}{3x+12} > 0 \quad \left| \cdot (3x+12) \right.$$

$$\Rightarrow 2x-6 < 0$$

$$\Rightarrow x < 3$$

$$L =]-\infty; -4[$$

4.) Potenzgesetze

$$a) \quad \left[\left(2^2 \right)^{-1} \right]^2$$

Lösung: $\left[\left(2^2 \right)^{-1} \right]^2 = 2^{2 \cdot (-1) \cdot 2} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

$$b) \quad 1^{100} \cdot 3^4 \cdot 5$$

Lösung: $1^{100} \cdot 3^4 \cdot 5 = 1 \cdot 81 \cdot 5 = 405$

$$c) \quad \frac{X^{n+3} \cdot X^{4n-6} \cdot X^{-3n-2}}{X^{2n-4} \cdot X^{-4n+2}}$$

Lösung: $= X^{n+3+4n-6-3n-2-(2n-4-4n+2)} = X^{4n-3}$

$$d) \left[\frac{\left(x^{2n+4}\right)^2 \cdot x^{-3n+2}}{x^{n-6}} \right]^3$$

Lösung:

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(x^{2n+4}\right)^6 \cdot x^{-9n+6}}{x^{3n-18}} = \frac{x^{12n+24} \cdot x^{-9n+6}}{x^{3n-18}} \\ &= x^{12n+24-9n+6-(3n-18)} = x^{48} \end{aligned}$$

$$e) \left(a^{m^2}\right)^{30} - \left(a^{3m}\right)^{10m}$$

Lösung:
$$= a^{30 \cdot m^2} - a^{3m \cdot 10m} = a^{30m^2} - a^{30m^2} = 0$$

$$f) \sqrt[200]{a^{223} \cdot a^{77} \cdot a^{100}}$$

Lösung:

$$= \sqrt[200]{a^{223+77+100}} = \sqrt[200]{a^{400}} = a^{\frac{400}{200}} = a^2$$

g) Erklären Sie, warum der Ausdruck $(-x)^{2n+1}$ für $x > 0$ immer eine negative Zahl darstellen wird.

Lösung:
$$(-x)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot x^{2n+1} = -x^{2n+1} < 0$$

$2n+1$ ist immer eine ungerade Zahl, daher bleibt das negative Vorzeichen.

5.) Textaufgaben

- a) 11 aufeinanderfolgende Dreierzahlen ergeben zusammen 1.353.
Wie lauten die Zahlen?

Lösung:

$$\begin{aligned}(x-15) + (x-12) + \dots + x + \dots (x+12) + (x+15) &= 1.353 \\ \Rightarrow 11x &= 1.353 \Rightarrow x = 123 \\ \Rightarrow 108; 111; 114; 117; 120; 123; 126; 129; 132; 135; 138\end{aligned}$$

- b) Wie viel Prozent Alkohol hat die Mischung von 30 Ltr. 60%-igem Alkohol und 70 Ltr. 20%-igem Alkohol?

Lösung: $30 \cdot 0,6 + 70 \cdot 0,2 = 18 + 14 = 32 [\%]$