Musterlösung **11. Jgst.** **3. Test** **Datum: 14.01.2009**

Klasse: GY GS 08 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gleichungen bzw. ganzrat. Fkt. vom Grad n

1.) Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

a) $3x(2x-6)(x^2+4) \quad = \quad 0$

Lösung: $3x=0 \quad \wedge \quad 2x-6=0 \quad \wedge \quad x^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=3$

b) $6x^4+2x^3 \quad = \quad 0$

Lösung:

$$2x^3(3x+1) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3=0 \quad \wedge \quad 3x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=-\frac{1}{3}$$

c) $x^{n+1}-x^n \quad = \quad 0$

Lösung: $x^n(x-1) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x^n=0 \quad \wedge \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=1$

d) $2x^2+8x-4 \quad = \quad 6$

Lösung:

$$\xrightarrow{-6} \quad 2x^2+8x-10 \quad = \quad 0$$

$$x_{1/2} \quad = \quad \frac{-8\pm\sqrt{64-(-80)}}{4} \quad = \quad \frac{-8\pm\sqrt{144}}{4} \quad = \quad \frac{-8\pm 12}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad 1 \quad \wedge \quad x_2 \quad = \quad -5$$

e) $-2x^2 + 20 = 4x^4$

Lösung:

$$-2x^2 + 20 = 4x^4 \Rightarrow 4x^4 + 2x^2 - 20 = 0 \xrightarrow[x^2 = u]{Subst.} 4u^2 + 2u - 20 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+320}}{8} = \frac{-2 \pm 18}{8} \Rightarrow u_1 = 2 \wedge u_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow[x^2 = u]{\text{Resubst.}} x^2 = 2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

$$und \quad x^2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{Widerspruch (nicht lösbar)}$$

f) $4x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$

Lösung:

$$1.\,Lösung: \quad x = 1 \xrightarrow[oder\ Horner-Schema]{Polynomdivision} 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{-2 \pm 6}{8} \Rightarrow x_2 = -1 \wedge x_3 = \frac{1}{2}$$

2.) Lösungsverhalten bei quadratischen Gleichungen

Für welche Werte von k hat die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}x^2 - x + k = 2$$

(i) eine Lösung? (ii) zwei Lösungen?

Lösung: Diskriminante bestimmen

$$\xrightarrow{-2} \frac{1}{2}x^2 - x + k - 2 = 0$$

$$eine\ Lösung:$$

$$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (k-2) = 1 - 2k + 4 = 5 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

$$zwei\ Lösungen:$$

$$D = 5 - 2k > 0 \Rightarrow k < \frac{5}{2}$$

3.) Quadratische Gleichungen in der Praxis

Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch:

$$b(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2x - 9$$

Die unter Straßenniveau liegenden Auflagepunkte der Brücke sind C und D.

a) Bestimmen Sie die Höhe der Brücke vom Straßenniveau aus.

b) Berechnen Sie die Länge der Straße auf dieser Brücke.

c) Wie tief liegt der Auflagepunkt C unterhalb der Straße?

<u>Lösung:</u>

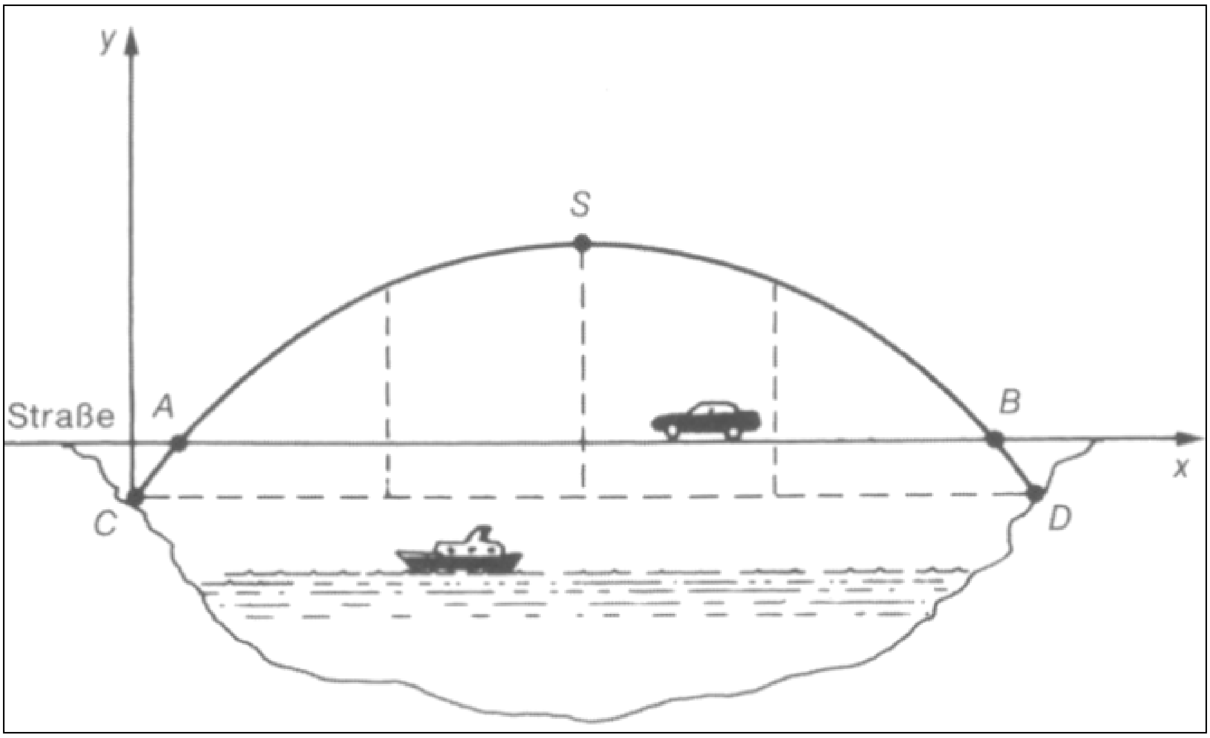
$$b(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2x - 9 = 0 \xrightarrow{\cdot(-25)} x^2 - 50x + 225 = 0$$

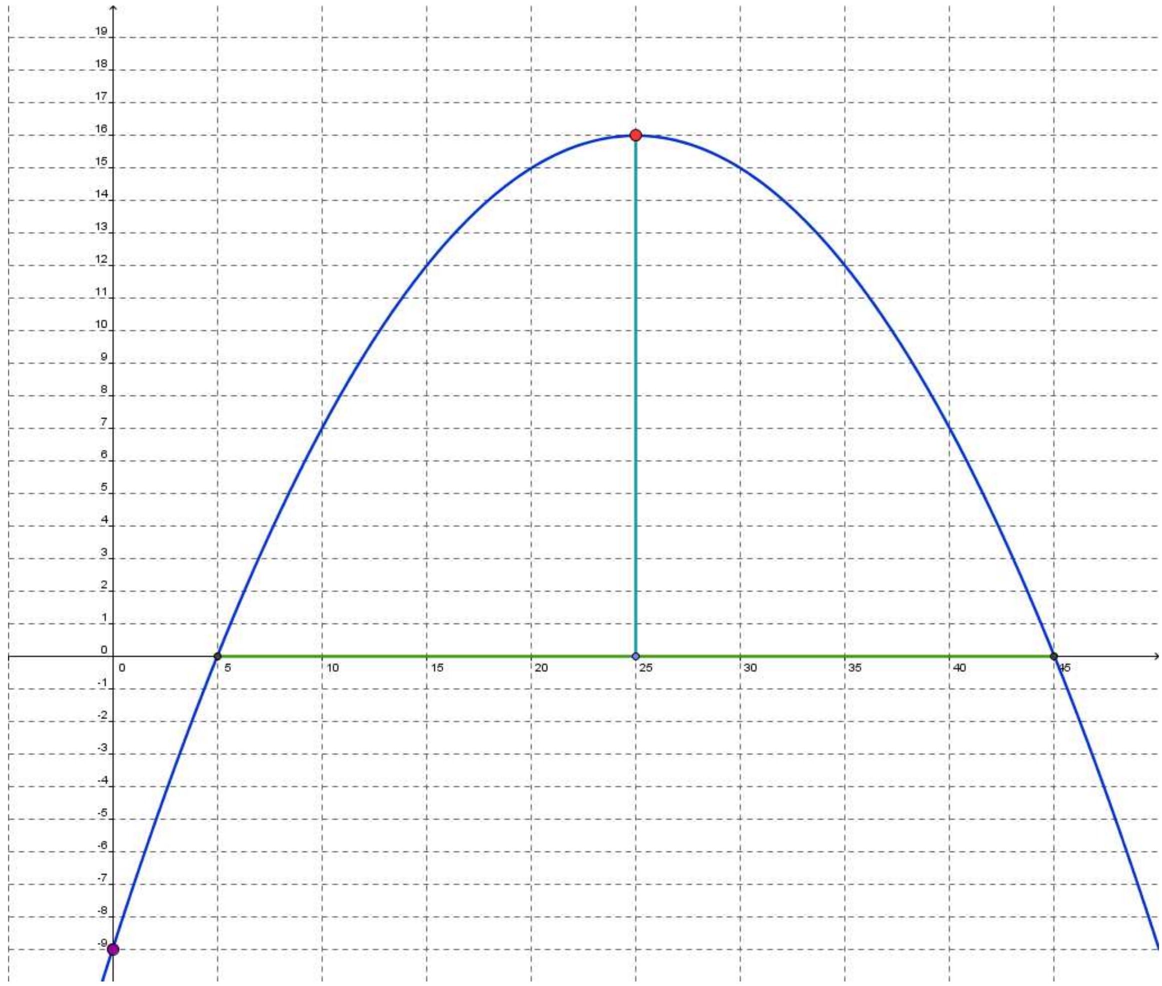
$$x_{1/2} = \frac{50 \pm \sqrt{2.500 - 900}}{2} = \frac{50 \pm 40}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \wedge x_2 = 45$$

$$\textit{Länge der Straße}: \quad \Delta x = 40$$

$$\textit{Höhe der Brücke}: \quad x_1 = \frac{5+45}{2} = 25 \Rightarrow b(25) = -\frac{1}{25}\cdot 25^2 + 2\cdot 25 - 9 = 16$$

$$\textit{Auflagepunkt}: \quad b(0) = -9$$





4.) Ganzrationale Funktionen I

Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

$a_5 = 4$ $\quad a_3 = 2$ $\quad a_4 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Wie viele Nullstellen hat diese Funktion mindestens, wie viele höchstens? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösung: Da eine Funktion 5. Grades vorliegt, hat die Funktion mindestens eine Nullstelle und maximal 5.
Hier ist in jedem Fall eine Nullstelle bei x = 0, da die Koeffizienten $a_2 = a_1 = a_0 = 0$ vorliegen.

5.) Ganzrationale Funktionen II

Geben Sie die Vorschrift einer ganzrationalen Funktion 4. Grades an, welche die angegebenen Nullstellen und keine weiteren besitzt:

$x_1 = x_2 = 3$ $\quad x_3 = 1$ $\quad x_4 = -2$

Lösung: $f(x) = (x-3)^2(x-1)(x+2)$