Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 27.02.2009**

Klasse: GY GS 08 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit; Differenzenquotient

---

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die zwei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften: Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y

a) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{(x-1)^2}$

Lösung:

$Zähler: \quad x^3-8=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad [Nullstelle]$

$Nenner: \quad (x-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad [Pol\ ohne\ VZW]$

keine Lücke

$Asymptote: Polynomdivision \quad \Rightarrow \quad a(x)=x+2$

$S_y(0 \mid -8)$

b) $g(x) = \dfrac{2(x-5)(x+3)}{5(x-1)(x+3)}$

Lösung:

$Zähler: \quad (x-5)(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=5 \quad [Nullstelle] \quad und \quad x_2=-3$

$Nenner: \quad (x-1)(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_2=-3$

$Lücke: \quad x=-3$

$Asymptote: Zählergrad = Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=\dfrac{2}{5}$

$S_y(0 \mid 2)$

2.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt:

a) Polstelle bei x = 1; Nullstelle bei x = - 2; Asymptote a(x) = 3

Lösung:

$$f(x) = \frac{3(x+2)}{(x-1)}$$

b) Zählergrad: n = 3; Lücke bei x = 2; Polstelle bei x = - 5; keine Nullstelle; Asymptote a(x) = $^1/_3$

Lösung:

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{3(x+5)(x-2)^2}$$

3.) Stetigkeit

Für welchen Wert von a ist die Funktion stetig? Bitte Begründung!

$$f_a(x) = \begin{cases} ax^3 + 2ax & \text{für } x < 1 \\ (ax)^2 + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\lim_{h \to 0^-} a(1-h)^3 + 2a(1-h) = \lim_{h \to 0^+} a^2(1+h)^2 + 2 \Rightarrow a + 2a = a^2 + 2$$

$$\Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 \quad und \quad a_2 = 2$$

4.) Differentialquotient

Berechnen Sie die Steigung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$$

in **x = 2** mittels 3 geeigneter Näherungen.

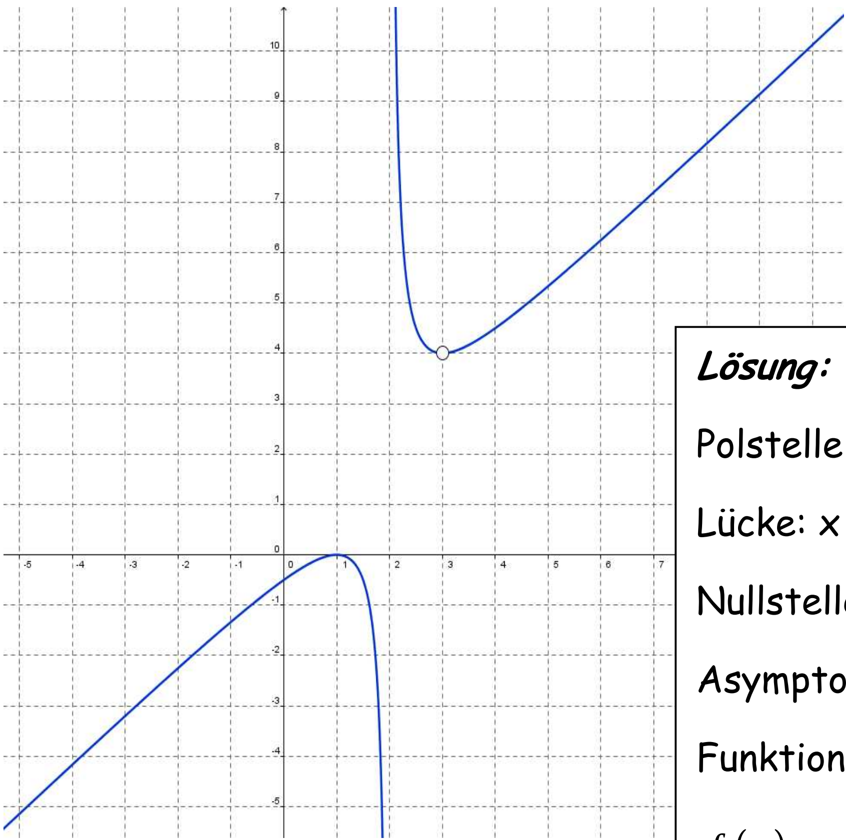
Lösung:

x	2	3	2,1	2,01
f(x)	0	7,5	0,4305	0,0403005
h	---	1	0,1	0,01
Differenzenquotient $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$	---	7,5 $\frac{7{,}5-0}{1}=7{,}5$	4,305 $\frac{0{,}4305-0}{0{,}1}$	4,03005 $\frac{0{,}0403005-0}{0{,}01}$

Die Steigung nähert sich dem Wert m = 4.

5.) Gebrochen-rationale Funktionen III

Geben Sie die Funktionsvorschrift, Polstelle(n), Lücke(n) und Asymptote des dargestellten Graphen an:



Lösung:

Polstelle: x = 2

Lücke: x = 3

Nullstelle: x = 1 (doppelt)

Asymptote: a(x) = x

Funktion:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$