Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 27.02.2009**

Klasse: GY GS 08 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Stetigkeit

1.) Gebrochen-rationale Funktionen I

Untersuchen Sie die drei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

Lösung:

$$Zähler: \quad x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad |x|=2 \quad [2\ Nullstellen]$$

$$Nenner: \quad x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$keine\ Lücke$$

$$Asymptote: Polynomdivision \quad \Rightarrow \quad a(x)=x-1$$

$$S_y(0 \mid -4)$$

b) $g(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$

Lösung:

$$Zähler: \quad (x-1)^2(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-3 \quad [Nullstelle] \quad und \quad x_2=1 \quad [doppelt]$$

$$Nenner: \quad (x-1)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3 \quad [Pol\ mit\ VZW] \quad und \quad x_2=1$$

$$Lücke: \quad x=1$$

$$Asymptote: Polynomdivision \quad \Rightarrow \quad a(x)=x+5$$

$$S_y(0 \mid 1)$$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+2x}$

Lösung:

$$Zähler: \quad x(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2 \quad [Lücke] \quad und \quad x_2=0 \quad [Lücke]$$

$$Nenner: \quad x(x^2+3x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1 \quad [Pol\ mit\ VZW]$$

$$und \quad x_2=-2\,;\, x_3=0$$

$$Lücke: \quad x_1=-2 \quad und \quad x_2=0$$

$$Asymptote: Zählergrad < Nennergrad \quad \Rightarrow \quad a(x)=0$$

S_y existiert nicht, weil bei x = 0 ein Lücke vorliegt!

2.) Gebrochen-rationale Funktionen II

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an, deren Graph folgende Eigenschaften besitzt:

a) Polstelle bei x = 2; Nullstelle bei x = - 3; Asymptote a(x) = 4

Lösung: $f(x) = \dfrac{4(x+3)}{(x-2)}$

b) Lücke bei x = - 1; doppelte Nullstelle bei x = 5

Lösung: $f(x) = \dfrac{(x-5)^2(x+1)}{(x+1)}$

c) Nennergrad: n = 3; Lücke bei x = 4; Polstelle bei x = - 2;
keine Nullstelle; Asymptote a(x) = $^1/_3$

Lösung: $f(x) = \dfrac{(x-4)^3}{3(x+2)(x-4)^2}$

3.) Stetigkeit I

Untersuchen Sie folgende Funktion mittels geeigneter Näherungs-rechnung auf Stetigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}x^4+\dfrac{1}{2}x & für\ x<2 \\ -0,25x^2+0,5x^3 & für\ x\geq 2 \end{cases}$$

Lösung:

(i) Funktionswert: $f(2) \;=\; -0{,}25\cdot 4+0{,}5\cdot 8 \;=\; 3$

(ii) von links:

x	1,9	1,99	1,999	=> 2
$f(x) = \frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x$	**2,57901**	**2,955299**	**2,995503**	**=> 3**

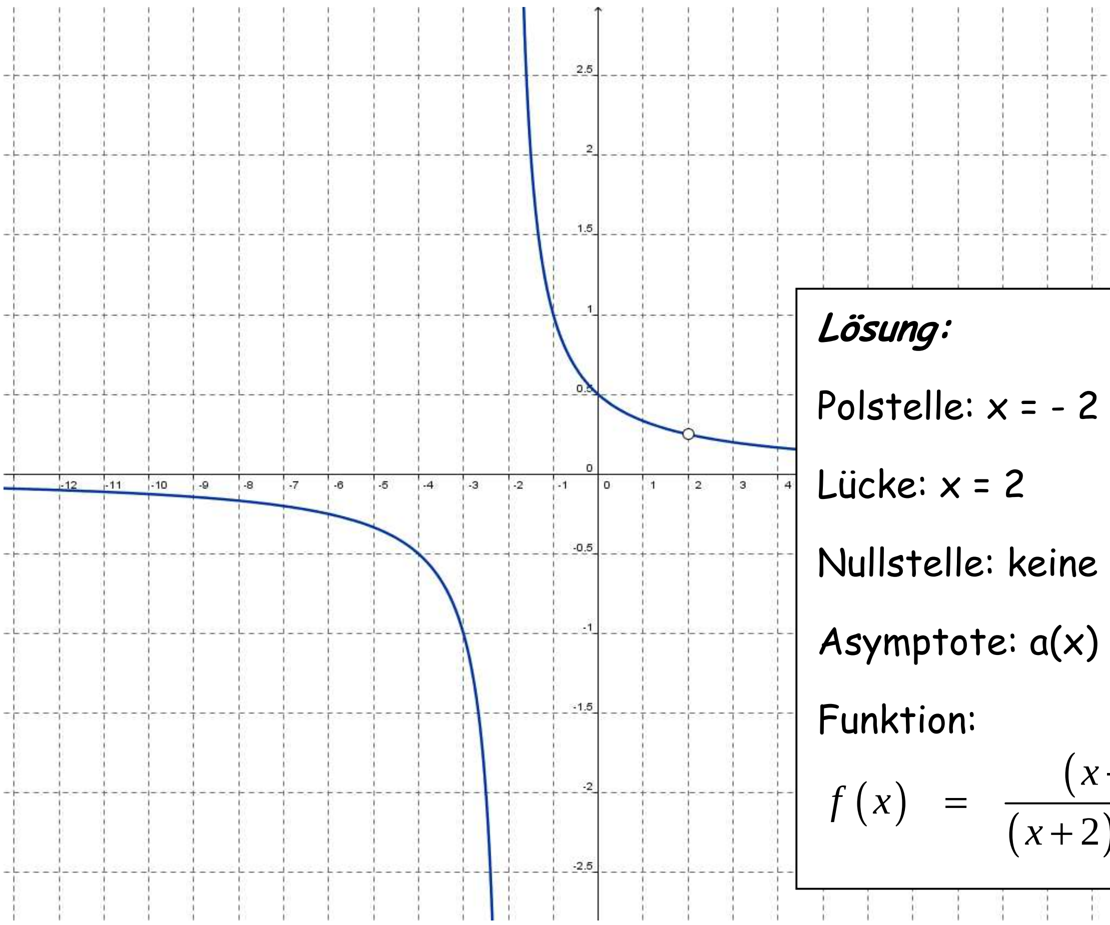
(iii) von rechts:

x	2,1	2,01	2,001	=> 2
$f(x) = \frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x$	**3,48101**	**3,04530**	**3,004503**	**=> 3**

Ergebnis: $\lim\limits_{h\to 0} f(2-h)=\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)=f(2) \;\Rightarrow\; f(x)\ ist\ stetig$

4.) Gebrochen-rationale Funktionen III

Geben Sie die Funktionsvorschrift, Polstelle(n), Lücke(n) und Asymptote des dargestellten Graphen an:



Lösung:

Polstelle: x = - 2

Lücke: x = 2

Nullstelle: keine

Asymptote: a(x) = 0

Funktion:

$$f(x) \;=\; \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

5.) Stetigkeit II

Beurteilen Sie folgende Aussagen nach richtig oder falsch und geben Sie eine Begründung an.

a) Eine Parabel (Grad n = 2) ist in jedem Punkt stetig.

Lösung: ***Diese Aussage ist wahr, denn eine Parabel ist eine ganzrationale quadratische Funktion.***

b) Wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert einer abschnittweise definierten Funktion übereinstimmen, dann ist die Funktion stetig.

Lösung: ***Diese Aussage ist falsch, denn es ist nicht gesagt, dass für den Funktionswert an der Stelle x_0 gilt:*** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

c) Eine gebrochen-rationale Funktion kann nie stetig sein.

Lösung: ***Diese Aussage ist falsch, denn nicht jede gebrochen-rationale Funktion muss eine Polstelle oder Lücke besitzen:***

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$$

Natürlich muss man hierbei die reellen Zahlen als Grundmenge voraussetzen!