Musterlösung **11. Jgst.** **5. Test** **Datum: 13.05.2009**

Klasse: GY GS 08 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen (Nullstellen – Extrema – Wendepunkte)**

1.) Monotonie

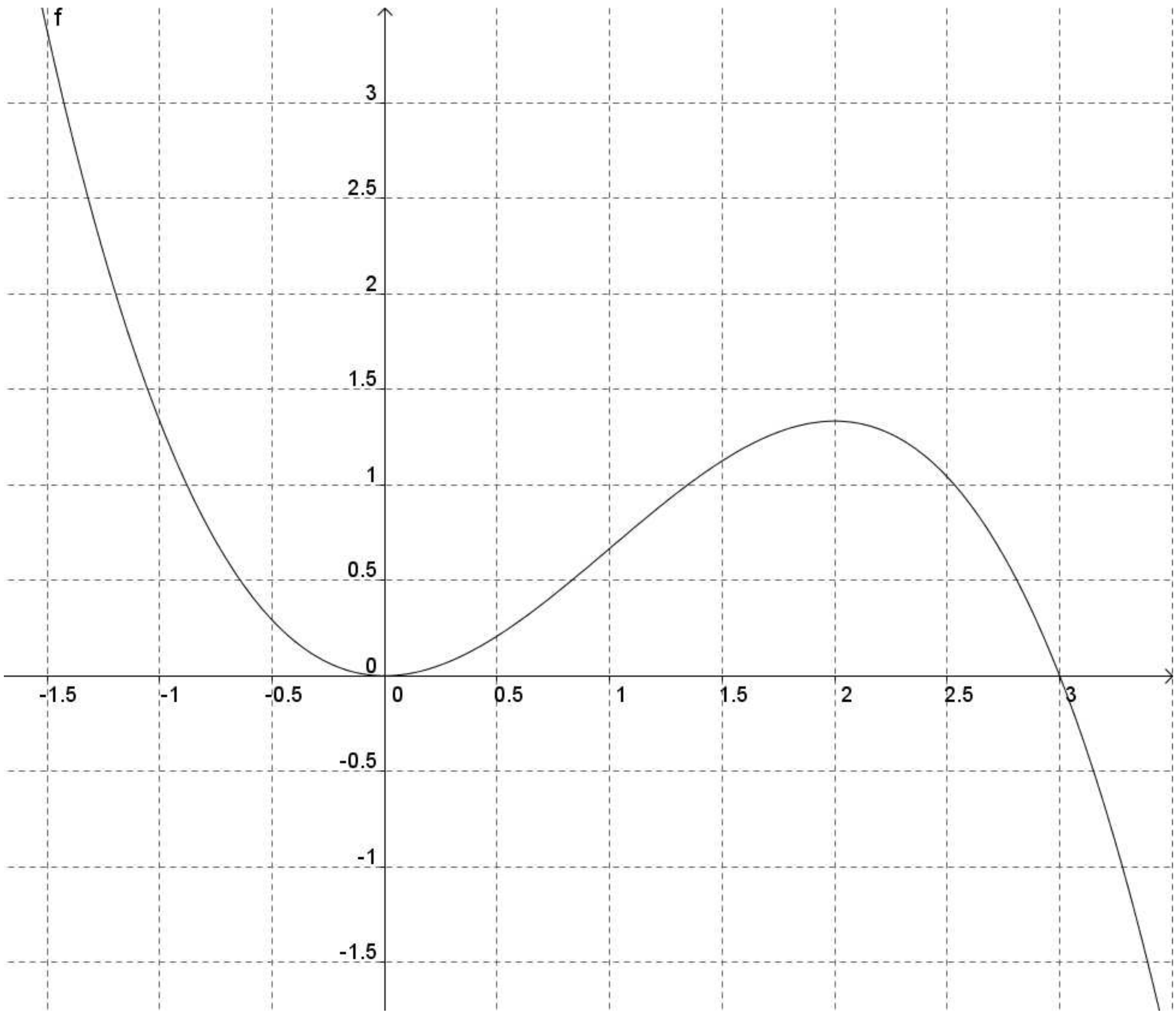
a) Welche Bedingung muss vorliegen, damit eine Funktion als monoton fallend bezeichnet wird?

Lösung: $f'(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in I$

b) Was bedeutet „streng monoton fallend"?

Lösung: $f'(x) < 0 \quad \text{für } x \in I$; d.h. die Bedingung wird verschärft

c) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und das Monotonieverhalten des Graphen:



Lösung:

Intervall 1: $I_1 =]-\infty\,;0[$ streng monoton fallend

Intervall 2: $I_2 =]0\,;2[$ streng monoton steigend

Intervall 3: $I_3 =]2\,;\infty[$ streng monoton fallend

2.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie

(i) die Nullstellen, (ii) die Extremwerte (iii) und die Wendepunkte

bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{9}{8}$

Lösung:

(i)

$$Ansatz: \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{9}{8} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}}}{1} = 2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = 2 \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 4{,}5 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

(ii)

$$f'(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 1 \Rightarrow f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow Min(2 \mid -3{,}125)$$

(iii) $f''(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow keine\,Wendepunkte$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

Lösung:

$$Ansatz: -\frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$$

(i) $x^2\left(-\frac{1}{3}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(doppelt) \wedge x = 3$

(ii)

$$f'(x) = -x^2+2x = x(-x+2) = 0 \Rightarrow x_1=0 \wedge x=2$$

$$f''(x) = -2x+2$$

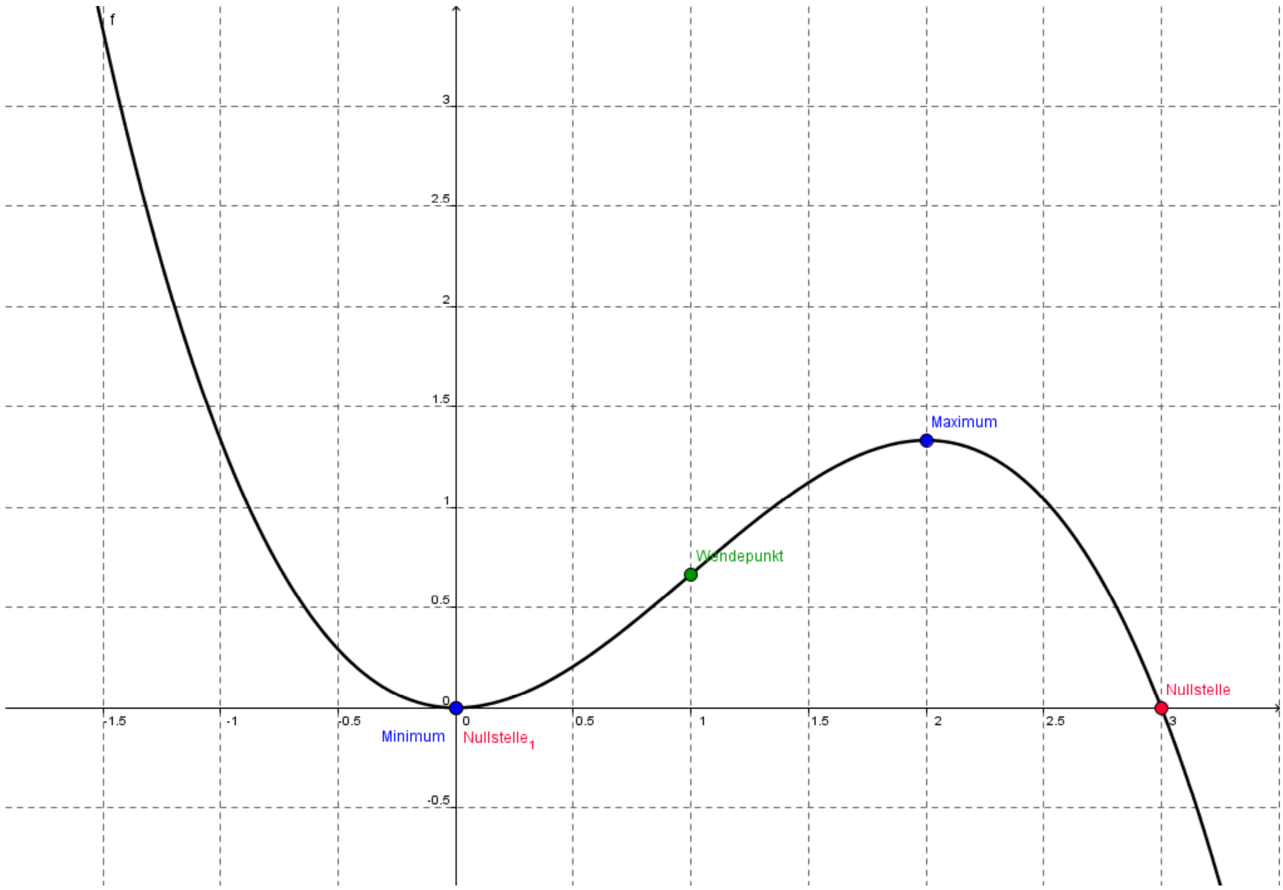
$$\Rightarrow f''(0) = 2>0 \Rightarrow Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(2) = -2<0 \Rightarrow Max\left(2 \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$$

(iii)

$$f''(x) = -2x+2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = -2 \neq 0 \Rightarrow W\left(1 \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$$



3.) **Mathematisches Erklären und Begründen**

a) Wie viele Extremwerte kann eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 maximal haben?

<u>Lösung:</u> Die Funktion kann 2 Extremwerte haben, da die erste Ableitung einen Grad weniger besitzt als die Funktion.

b) Wie viele Extremwerte muss eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 mindestens haben?

<u>Lösung:</u> Die Funktion muss keinen Extremwert besitzen: $f(x) = x^3$

c) Was ist die **notwendige** und was versteht man unter der **hinreichenden** Bedingung für einen Wendepunkt?

<u>Lösung:</u> notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$