Musterlösung **11. Jgst.** **1. Klassenarbeit** **Datum: 07.10.2009**

Klasse: GY GS 09 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Zahlenmengen und Intervalle; Lineare Funktionen; Abstand; Mittelpunkt

---

1.) Aufgaben zu Mengen und Intervallen

a) Erklären Sie, mit welchem Buchstaben die Menge der rationalen Zahlen dargestellt wird und warum dies so ist.

Lösung: Menge Q ist die Menge der rationalen Zahlen und symbolisiert alle Brüche; der Buchstabe Q resultiert aus dem Begriff Quotient (Ergebnis der Division).

b) Geben Sie die Menge in aufzählender Form an:

$$T = \{n \in N \mid n \text{ ist Teiler von } 8\}$$

Lösung: $T = \{1; 2; 4; 8\}$

c) Geben Sie die Menge in beschreibender Form an:

$$U = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; ...; 400\}$$

Lösung: $T = \{n \in N \mid \text{"die Quadratzahlen zu den Zahlen von 1 bis 20"}\}$

d) Kennzeichnen Sie die Mengen am Zahlenstrahl und geben

Sie diese als Intervalle an:

$A = \{x \in \Re \mid 2 \le x < 6\}$ $B = \{x \in \Re \mid x \le 4\}$

$C = \{x \in \Re \mid x > 2\}$

Lösung: $A = [\,2; 6\,[$ $B =]-\infty; 4\,]$ $C =]\,2; \infty\,[$

e) Stellen Sie die Intervalle in der Mengenschreibweise dar:

$D = [-3; 6\,[$ $E =]-\infty; 10\,[$ $F = [-10; 5\,]$

Lösung: $D = \{x \in \Re \mid -3 \le x < 6\}$ $E = \{x \in \Re \mid x < 10\}$

$F = \{x \in \Re \mid -10 \le x \le 5\}$

2.) Geraden

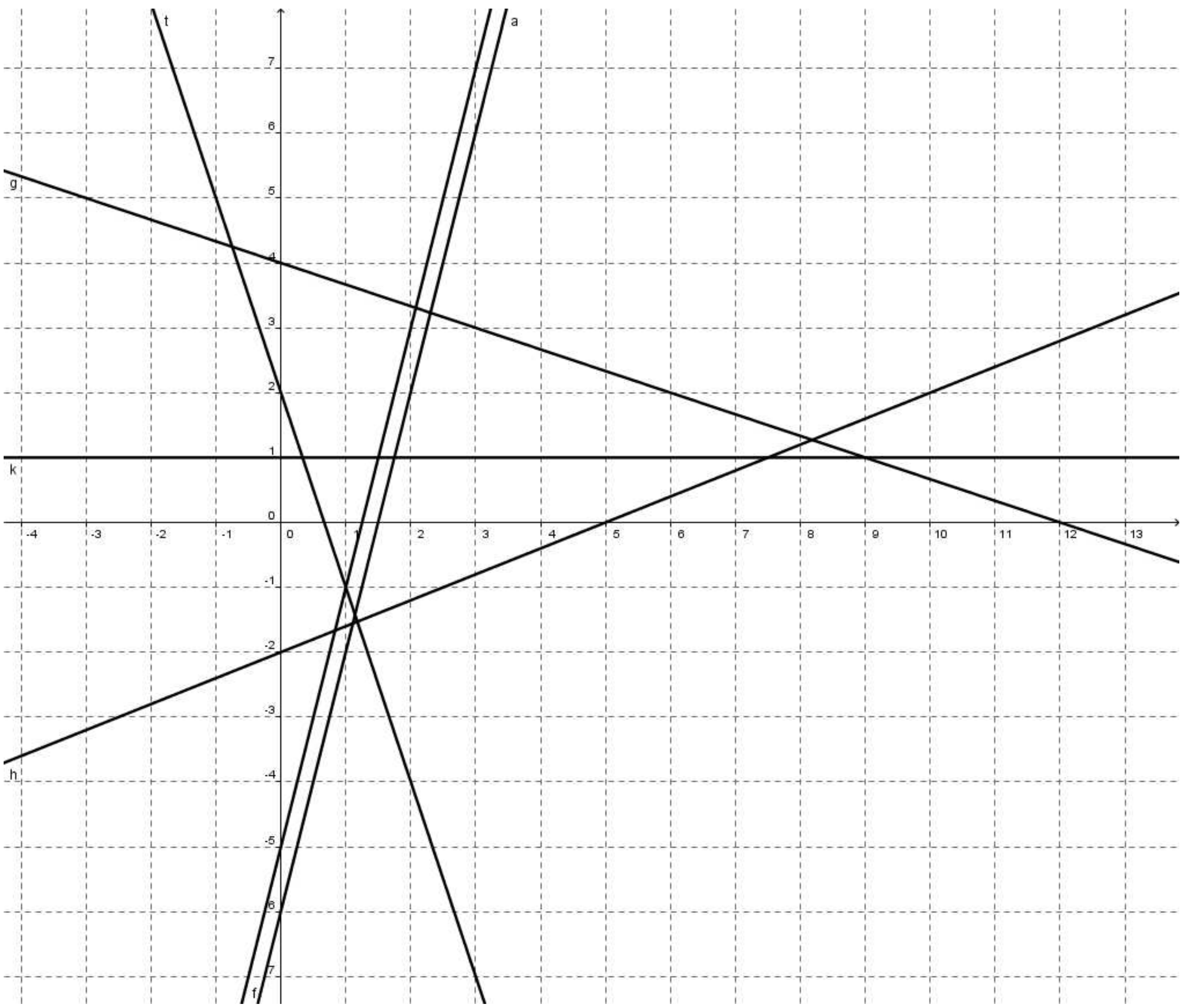
Zeichnen Sie folgende Geraden in ein Koordinatensystem:

a) $f(x) = 4x-5$ b) $g(x) = -\frac{1}{3}x+4$

c) $h(x) = \frac{2}{5}x-2$ d) $t(x) = -3x+2$

e) $k(x) = 1$ f) $y+x-4 = -3x+2+2y$

Lösung: $y+x-4 = -3x+2+2y \Rightarrow y = 4x-6$



3.) Berechnungen mit Geraden

Gegeben sind die Punkte A (-1 / 2) und B (4 / -3) und die Gerade $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

a) Bestimmen Sie die lineare Funktionsvorschrift, auf der die Punkte A und B liegen.

Lösung:

$$m = \frac{(-3)-2}{4-(-1)} = \frac{-5}{5} = -1$$

Punkt P(-1 / 2) eingesetzt: $2 = -1 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x + 1$

b) Prüfen Sie, ob die Punkte C (-1 / $2\frac{2}{3}$) und D (4 / -2) auf der Geraden $f(x)$ liegen.

Lösung:

$$f(-1) = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{7}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \Rightarrow C \in f(x)$$

$$f(4) = -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow D \notin f(x)$$

c) Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte E (-2 / ?) und F (? / $\frac{4}{3}$) , damit gilt: E $\in$ $f(x)$ und F $\in$ $f(x)$.

Lösung:

$$f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + \frac{7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow E(-2 \mid 3)$$

$$\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow F\left(3 \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$$

d) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf f(x) steht und durch den Punkt A verläuft?

Lösung:

$$m_{senkrecht} = 3$$

Punkt P(-1 / 2) eingesetzt: $2 = -1 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = 5 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 3x + 5$

e) Nennen Sie die Funktionsvorschrift der zu $f(x)$ parallelen Geraden durch den Punkt B

Lösung: Punkt P(4 / -3) eingesetzt: $-3 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

f) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.

Lösung: $e = \sqrt{\left[4-(-1)\right]^2+(-3-2)^2} = \sqrt{50}$

4.) Heron-Verfahren

Berechnen Sie den Ausdruck $\sqrt{8}$ nach dem Heronverfahren.

Bitte führen Sie hierbei 2 Näherungen durch.

Lösung:

Startwert: $x_1 = 3$ Näherung 1: $x_2 = \frac{1}{2}\left(3+\frac{8}{3}\right) = \frac{17}{6}$

Näherung 2: $x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}+\frac{8}{\frac{17}{6}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}+\frac{48}{17}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{289+288}{102} = \frac{577}{204}$

5.) Anwendungen zu linearen Funktionen

Der Schnellimbiss MackPomm benötigt für die Friteusen täglich 17,5 kg frisches Fett. Momentan sind noch 385 kg auf Lager.

a) Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf.

Lösung: $f(x) = -17{,}5\,x+385$

b) Bei einem Lagerbestand von 95 kg muss der Filialleiter nachbestellen. Nach welcher Zeit muss die Bestellung erfolgen?

Lösung: $95 = -17{,}5\,x+385 \Rightarrow x = \frac{2900}{175} \approx 16{,}57\,[Tage]$

c) Wie lange reicht das Fett, wenn man nicht nachbestellen würde?

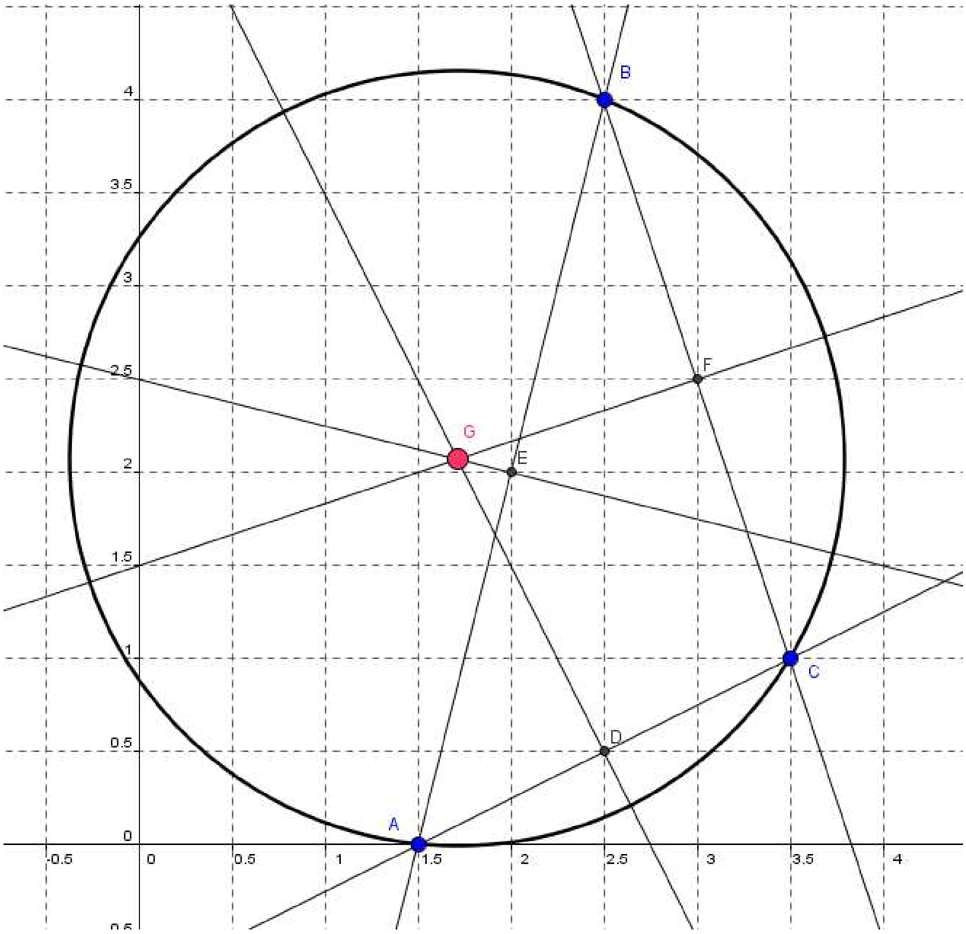
Lösung: $0 = -17{,}5\,x+385 \Rightarrow x = \frac{3850}{175} = 22\,[Tage]$

6.) Dreiecke & Rechtecke

Gegeben seien die drei Punkte A(1,5 / 0) B(2,5 / 4) und C(3,5 / 1).

a) Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem und konstruieren Sie den Umkreismittelpunkt.
Skizzieren Sie **auch** den Umkreis.

Lösung:



b) Berechnen Sie nun die Geradengleichungen, welche die Seiten des Dreiecks darstellen.

Lösung:

Gerade AB

$$m = \frac{4-0}{2,5-1,5} = 4 \xrightarrow{A} 0 = 4\cdot 1,5 + b \Rightarrow b = -6 \Rightarrow g_{AB}(x) = 4x - 6$$

Gerade AC

$$m = \frac{1-0}{3,5-1,5} = \frac{1}{2} \xrightarrow{A} 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \Rightarrow g_{AC}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

Gerade BC

$$m = \frac{1-4}{3,5-2,5} = -3 \xrightarrow{B} 4 = -3\cdot 2,5 + b \Rightarrow b = 11,5 \Rightarrow g_{BC}(x) = -3x + 11,5$$

c) Berechnen Sie die jeweiligen Mittelpunkte der drei Seiten.

Lösung:

Mittelpunkt: AB $\Rightarrow$ $M(2 \mid 2)$ Mittelpunkt: AC $\Rightarrow$ $M(2{,}5 \mid 0{,}5)$

Mittelpunkt: BC $\Rightarrow$ $M(3 \mid 2{,}5)$

d) Die Geradengleichungen der Mittelsenkrechten lauten:

$$f_1(x) = -2x+\frac{11}{2} \qquad f_2(x) = -\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$$

Ordnen Sie die Mittelsenkrechten den jeweiligen Dreieckseiten zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Die Zuordnung erfolgt aufgrund der senkrechten Steigungen (Mittelsenkrechten) zu den Seitengeraden des Dreiecks.

$$f_1(x) = -2x+\frac{11}{2} \perp \text{Gerade } AC$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \perp \text{Gerade } AB$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x+\frac{3}{2} \perp \text{Gerade } BC$$

e) Ermitteln Sie den Umkreismittelpunkt und zeigen Sie, dass sich alle drei Mittelsenkrechten in diesem Punkt treffen.

Lösung:

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow -2x+\frac{11}{2} = -\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \xrightarrow[-\frac{11}{2}]{+\frac{1}{4}x} -\frac{7}{4}x = -3 \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

$$f_2\left(\frac{12}{7}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{7}+\frac{5}{2} = -\frac{3}{7}+\frac{5}{2} = \frac{-6+35}{14} = \frac{29}{14} \Rightarrow M_{Umkreis}\left(\frac{12}{7} \,\middle|\, \frac{29}{14}\right)$$

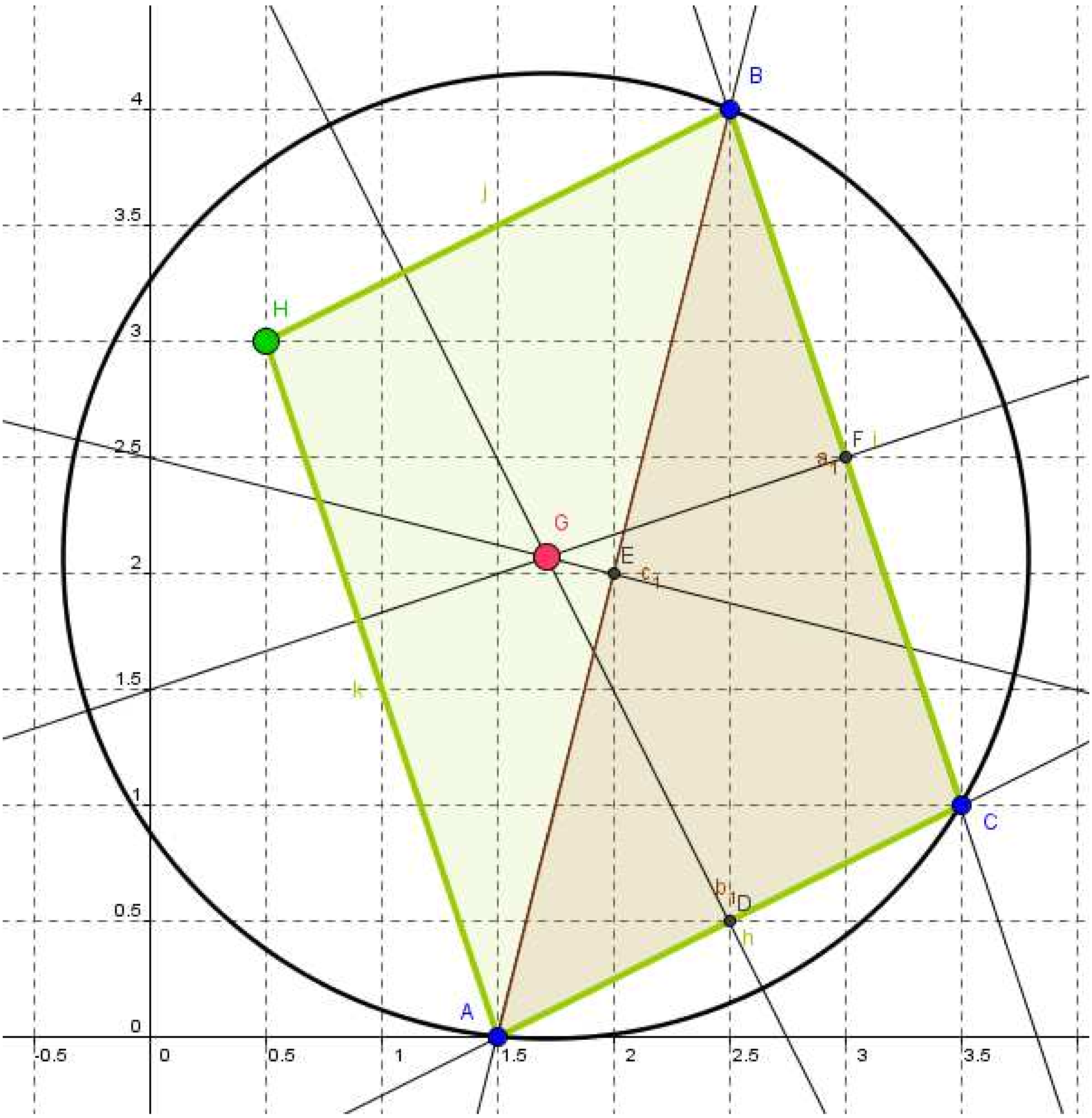
Probe:

$$f_3\left(\frac{12}{7}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{7}+\frac{3}{2} = \frac{4}{7}+\frac{3}{2} = \frac{8+21}{14} = \frac{29}{14}$$

f) Der Punkt C wird nun an der Seite AB gespiegelt, so dass ein Parallelogramm entsteht.

Zeichnen Sie dies ebenfalls in das Koordinatensystem und ermitteln Sie die Koordinaten des gespiegelten Punktes.

Lösung: Gesuchter Punkt: $\Rightarrow \quad H\,(0{,}5 \mid 3)$



7.) Aus dem Internet: Thema: Steigung und Gefälle

Hallo Allerseits !! Ich hab´ da mal ´ne Frage: Ihr kennt doch alle dieses dreieckige Verkehrszeichen für Gefälle bzw Steigung, wo dann das Gefälle oder die Steigung in Prozent angegeben ist?! Gestern habe ich darüber mit einem Freund und wir sind uns nicht einig geworden, wie das mit den Prozenten gemeint ist.

Mein Freund sagt, er hat einen Freund, der Tiefbauingenieur ist, und der sagt wiederum, dass 45 Grad 100% sind und dass das danach berechnet wird. Damit bin ich aber nicht zufrieden.

Wenn ich mir ein Quadrat vorstelle, dann haben doch alle vier Ecken einen Winkel von 90 Grad, oder? Also wären dann doch 90 Grad 100%?

45 Grad ergeben sich doch bei einer Diagonalen durch das Quadrat, oder nicht oder wie? Nach meiner Vorstellung wären 45 Grad 50% Steigung.
Wer weiß, wie das ist mit dem Verkehrsschild??

Greetings eggneck

Bitte nehmen Sie zu den in diesem Diskussionsbeitrag „Plauderecke" dargestellten Aussagen kurz Stellung und würdigen Sie diese kritisch aus mathematischer Sicht.

Lösung: Der Freund hat recht mit seiner Aussage, da auf eine Länge von 100 m gleichzeitig eine Höhe von 100 m erreicht wird vergleichbar einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck. Dadurch entsteht im Punkt A der Steigungswinkel 45 °, was einem Tangenswert von 1 entspricht. Da der Tangens durch

$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ definiert ist und in diesem besonderen Fall

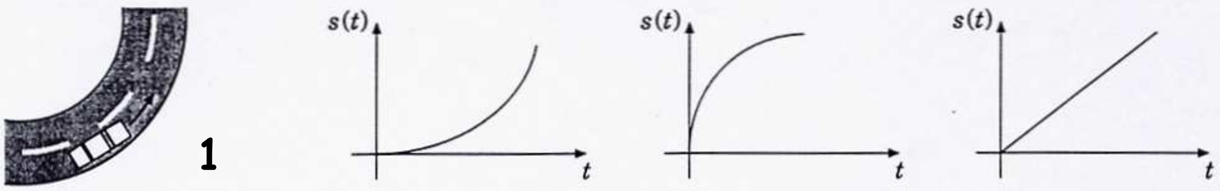
$Gegenkathete = Ankathete$ gilt, folgt ein Seitenverhältnis von 1 : 1 bzw. ein Prozentwert von 100.

8.) Funktionen und Situationen

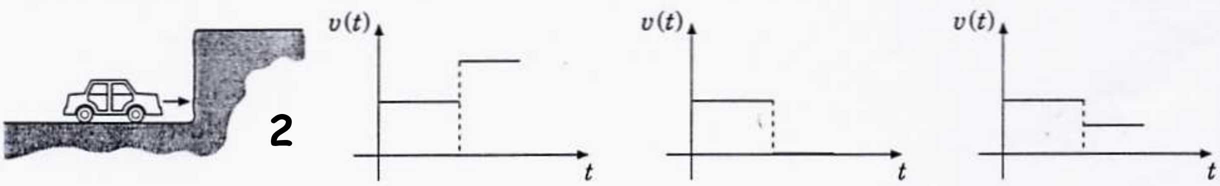
In den folgenden Aufgaben ist im Bild jeweils eine bestimmte Situation dargestellt. Daneben sind einige Funktionsgraphen gezeichnet.

Welcher Graph beschreibt die jeweilige Situation am besten.
Bitte mit Begründung!

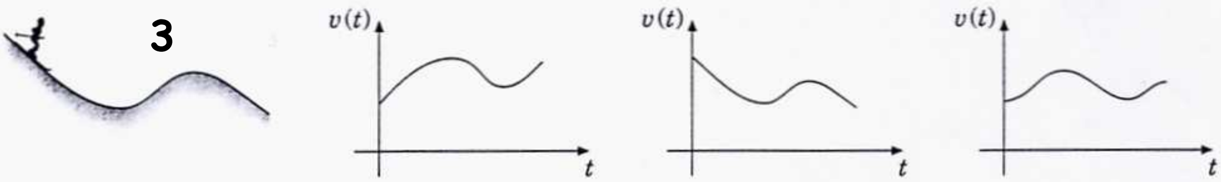
Das Auto bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit. Der Funktionswert *s(t)* gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt *t* an.



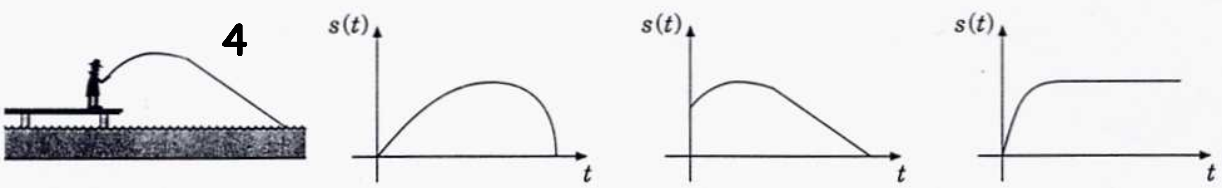
Das Auto fährt in die angegebene Richtung. Der Funktionswert *v(t)* gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *t* an.



Der Skifahrer fährt den Hang hinunter. Der Funktionswert *v(t)* gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *t* an.



Der Angler wirft die Angel vom Stegrand aus ins Wasser. Der Funktionswert *s(t)* gibt die waagerechte Entfernung des Angelhakens vom Stegrand zum Zeitpunkt *t* an.



<u>Lösung:</u>

Bild 1: Funktion 3 (linearer Verlauf wegen gleichbleibender Geschwindigkeit)

Bild 2: Funktion 2 (Geschwindigkeit sinkt auf den Wert 0)

Bild 3: Funktion 1 (Geschwindigkeit erhöht sich bei der Abfahrt; Verringerung bei Fahrt bergauf)

Bild 4: Funktion 3 (Entfernung wird ab einem bestimmten Punkt nicht mehr verändert)